Logika vs Algebra

Logická funkcia

$$\varphi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$$

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_2 \Rightarrow x_3$$

x_1	x_2	x_3	$\varphi(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Logická funkcia

#	x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
3	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
4	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
log. spojky				$\wedge$		x_1		x_2	$\oplus$	$\vee$	$\downarrow$	$\equiv$	$\neg x_2$		$\neg x_1$	$\Rightarrow$	$\uparrow$	

Logická funkcia

Definícia:

literál *konjunktívna klauzula* *disjunktívna klauzula*

$x \quad \overline{x}$ $x \wedge y$ $x \vee y$

Konjunktívna normálna forma je konjunkciou disjunktívnych klauzúl. $(x_1 \vee x_2 \vee \ldots) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \ldots) \wedge \ldots$

Disjunktívna normálna forma je disjunkciou konjunktívnych klauzúl. $(x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \ldots) \vee \ldots$

Formuly $\varphi(p_{1,} p_{2,.} .., p_n)$ a $\psi(p_{1,} p_{2,.} .., p_n)$ sú ekvivalentné ($\sim$) ak pre každú interpretáciu (hodnoty $p_{1,} \ldots, p_n$) nadobúdajú tieto funkcie rovankú hodnotu.

Logická funkcia

Veta:

Pre každú logickú funkciu existuje ekvivalentá formula v tvare **konjunktívnej normálnej forme.**

Pre každú logickú funkciu existuje ekvivalentá formula v tvare **disjunktívnej normálnej forme.**

Formula φ je **kontradikcia** práve vtedy, ak jej ekvivalentná disjunktívna normálna forma φ_{DNF} obsahuje v každej konjunktívnej klauzule dvojicu komplementárnych literálov.

$$\left(x_1 \wedge \overline{x_1}\right) \vee \left(x_2 \wedge \overline{x_2}\right)$$

Formula φ je **tautológia** práve vtedy, ak jej ekvivalentná konjunktívna normálna forma φ_{CNF} obsahuje v každej disjunktívnej klauzule dvojicu komplementárnych literálov.

$$\left(x_1 \vee \overline{x_1}\right) \wedge \left(x_2 \vee \overline{x_2}\right)$$

Logická funkcia

Ako zostrojiť takúto funkciu? Poradí nám tabuľka hodnôt. Tak napr. ak v tabuľke sú dominantné nulové funkčné hodnoty, potom je výhodné použiť konjunktívnu normálnu inak je vhodná disjunktívna normálna forma.

Príklad:

$$\alpha_{DNF}(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{(\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3})}_{\tau_3} \vee \underbrace{(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3)}_{\tau_6}$$

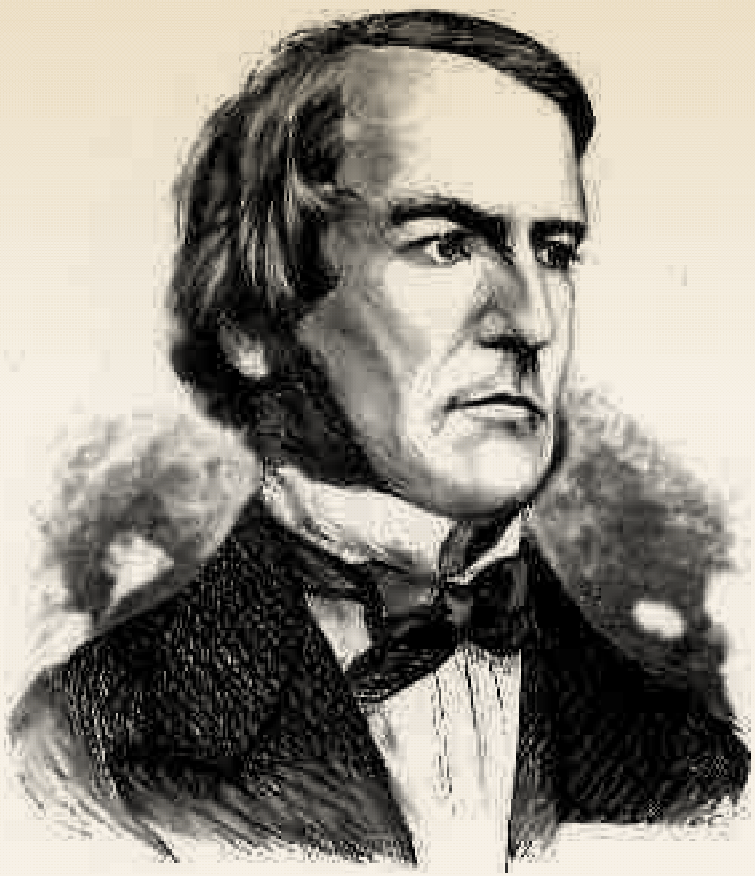
$$\beta_{DNF}(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{(\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3})}_{\tau_1} \vee \underbrace{(\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3)}_{\tau_2} \vee \underbrace{(\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3)}_{\tau_4}$$
$$\vee \underbrace{(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3})}_{\tau_5} \vee \underbrace{(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3)}_{\tau_6} \vee \underbrace{(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)}_{\tau_8}$$

$$\beta_{DNF}(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{(\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3})}_{\tau_1} \vee \underbrace{(\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3)}_{\tau_2} \vee \underbrace{(\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3)}_{\tau_4}$$
$$\vee \underbrace{(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3})}_{\tau_5} \vee \underbrace{(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3)}_{\tau_6} \vee \underbrace{(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)}_{\tau_8}$$

$$\beta_{CNF}(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)}_{\tau_3} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)}_{\tau_7}$$

	x_1	x_2	x_3	α	β
τ_1	0	0	0	0	1
τ_2	0	0	1	0	1
τ_3	0	1	0	1	0
τ_4	0	1	1	0	1
τ_5	1	0	0	0	1
τ_6	1	0	1	1	1
τ_7	1	1	0	0	0
τ_8	1	1	1	0	1

Boolova algebra



George Boole
(1815 -1864)

An Investigation of the Laws of Thought

Boolova algebra

Definícia:

Boolova algebra výrokovej logiky je usporiadaná 6-tica $(\Omega, \vee, \wedge, \neg, \bot, \top)$, kde $\Omega = \{\varphi, \psi, \omega \ldots\}$ je neprázdna množina elementov, ktorá obsahuje dva špeciálne, $\top, \bot \in \Omega$ a nad Ω sú definované binárne operácie sú definované operácie

$$\vee \; : \Omega \times \Omega \to \Omega, \quad \wedge : \Omega \times \Omega \to \Omega, \neg : \Omega \to \Omega,$$

ktoré vyhovujú podmienkam:

komutatívnosť: $\varphi \vee \psi = \psi \vee \varphi, \quad \varphi \wedge \psi = \psi \wedge \varphi$

asociativnosť: $(\varphi \vee \psi) \vee \omega = \psi \vee (\varphi \vee \omega), \quad (\varphi \wedge \psi) \wedge \omega = \psi \wedge (\varphi \wedge \omega)$

distributívnosť: $\varphi \vee (\psi \wedge \omega) = (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \omega)$

$$\varphi \wedge (\psi \vee \omega) = (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \omega)$$

vlastnosť $\bot$: $\varphi = \varphi \vee \bot, \quad \varphi \wedge \neg \varphi = \bot$

vlastnosť $\top$: $\varphi = \varphi \wedge \top, \quad \varphi \vee \neg \varphi = \top$

Boolova algebra

Definícia:

Boolova algebra výrokovej logiky je usporiadaná 6-tica $(\Omega, \vee, \wedge, \neg, \bot, \top)$, kde $\Omega = \{\varphi, \psi, \omega \ldots\}$ je neprázdna množina elementov, ktorá obsahuje dva špeciálne, $\top, \bot \in \Omega$ a nad Ω sú definované binárne operácie sú definované operácie

$$\vee \; : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega, \quad \wedge : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega, \neg : \Omega \rightarrow \Omega,$$

ktoré vyhovujú podmienkam:

komutatívnosť: $\varphi \vee \psi = \psi \vee \varphi$

asociatívnosť: $(\varphi \vee \psi) \vee \omega = \psi$

distributívnosť: $\varphi \vee (\psi \wedge \omega) = ($

$$\varphi \wedge (\psi \vee \omega) = (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \omega)$$

vlastnosť $\bot$: $\varphi = \varphi \vee \bot, \quad \varphi \wedge \neg \varphi = \bot$

vlastnosť $\top$: $\varphi = \varphi \wedge \top, \quad \varphi \vee \neg \varphi = \top$

Poznámka:
namiesto $\vee, \wedge, \neg \top$ a $\bot$
bežne píšeme $+, ., ^{-}, 1, 0$

Logika vs Algebra

	algebra množín	výroková logika
komutatívnosť	$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$	$p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$
asociatívnosť	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
distributívnosť	$A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
de Morganove zákony	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\neg (p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg (p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
idempotentnosť	$A \cap A = A$ $A \cup A = A$	$p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$
identita	$A \cap U = A$ $A \cup \emptyset = A$	$p \wedge 1 \equiv p$ $p \vee 0 \equiv p$
absorbcia	$\neg A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cup U = U$	$p \wedge 0 \equiv 0$ $p \vee 1 \equiv 1$
involúcia	$\overline{\overline{A}} = A$	$\neg (\neg p) \equiv p$
zákon vylúčenia tretieho	$A \cup \overline{A} = U$	$p \vee \neg p \equiv 1$
zákon sporu	$A \cap \overline{A} = \emptyset$	$p \wedge \neg p \equiv 0$

Boolova Algebra

Príklad:

Majme množinu deliteľov čísla 30: $B=\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$. Zadefinovaním operácie $gcd(x,y)$ ako násobenie a $lcm(x,y)$ ako sčítanie a negáciu ako $30/x$, spolu s 1 ako nulovým prvkom a 30 ako jednotkou, dostaneme Boolovu algebru.

$$gcd(x, lcm(y,z)) = lcm(gcd(x,y), gcd(x,z))$$

$$x=2^{k_1}3^{k_2}5^{k_3} \quad y=2^{m_1}3^{m_2}5^{m_3} \quad z=2^{n_1}3^{n_2}5^{n_3}$$

Boolova Algebra

Príklad:

$$lcm(y,z)=2^{s_1}3^{s_2}5^{s_3}, \quad \forall\, i \quad s_i=max(m_i,n_i)$$

$$gcd(x,lcm(y,z))=2^{t_1}3^{t_2}5^{t_3}, \quad \forall\, i \quad t_i=min(k_i,max(m_i,n_i))$$

$$gcd(x,y)=2^{u_1}3^{u_2}5^{u_3}, \quad \forall\, i \quad u_i=min(k_i,m_i)$$

$$gcd(x,z)=2^{v_1}3^{v_2}5^{v_3}, \quad \forall\, i \quad v_i=min(k_i,n_i)$$

$$lcm(gcd(x,y),gcd(x,z))=2^{w_1}3^{w_2}5^{w_3},$$
$$\forall\, i \quad w_i=max(min(k_i,m_i),min(k_i,n_i))$$

Boolova Algebra

Platí pre ľubovoľné $x = p_1 p_2 \dots p_n$, kde p_i sú rôzne prvočísla!

Boolova Algebra

Príklad:

Množina $n \in Z^{+,} F_n = \{ f : \Omega^n \to \Omega \}$ Boolovských funkcií n premenných, je spolu s operáciam $+, -, ^{-},$ a konštantami 0 a 1 ako nula a jedna boolovou algebrou.

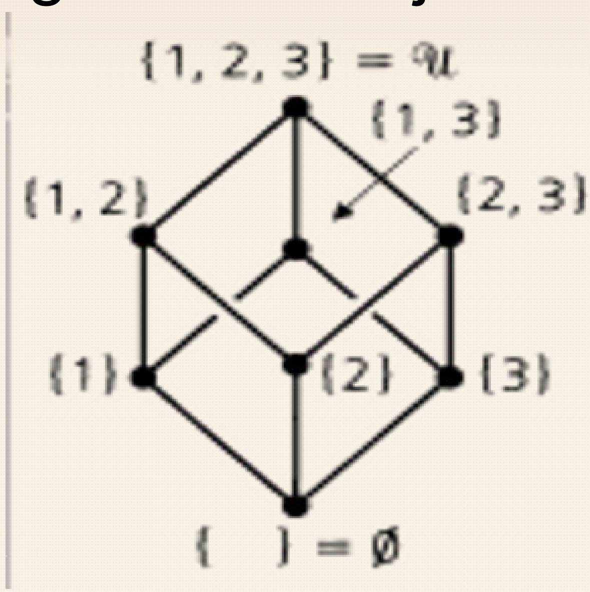
$$\overline{f}(b_{1,} b_{2,} \dots , b_n) = \overline{f(b_{1,} b_{2,} \dots , b_n)}$$

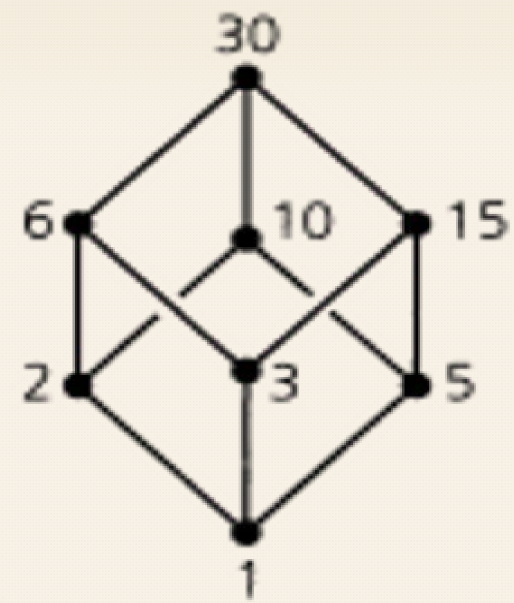
$$(f+g)(b_{1,} b_{2,} \dots , b_n) = f(b_{1,} b_{2,} \dots , b_n) + g(b_{1,} b_{2,} \dots , b_n)$$

$$(f.g)(b_{1,} b_{2,} \dots , b_n) = f(b_{1,} b_{2,} \dots , b_n) . g(b_{1,} b_{2,} \dots , b_n)$$

Boolova Algebra

Hasseho diagramy pre boolovu algebru množín a deliteľov čísla 30, nám dajú predstavu, že ľubovoľná bolovská algebra definuje čiastočné usporiadanie





Ak $\varphi, \psi \in \Omega$, potom $\varphi \leq \psi$ ak $\varphi \psi = \varphi$

Boolova Algebra

”Nenulové prvky Boolovej algebry nazývame **atómy,** ak

$\forall y \in \Omega, y \leq x \Rightarrow y = 0 \vee y = x$, kde x je atóm

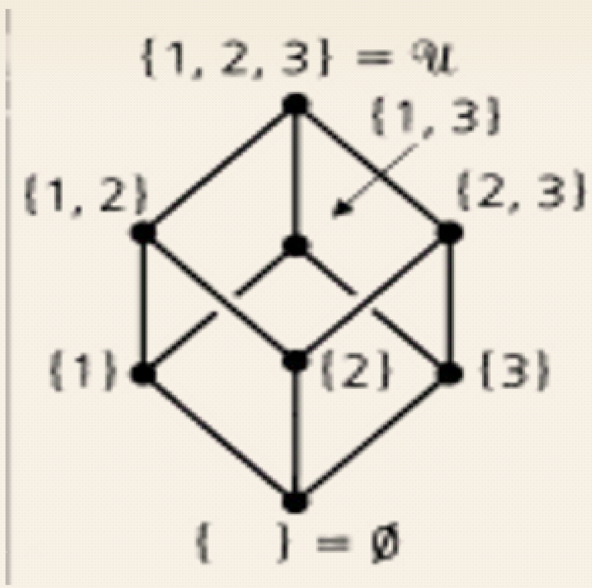
Ak x je atóm, potom $\forall y \in \Omega, xy = 0 \vee xy = x$

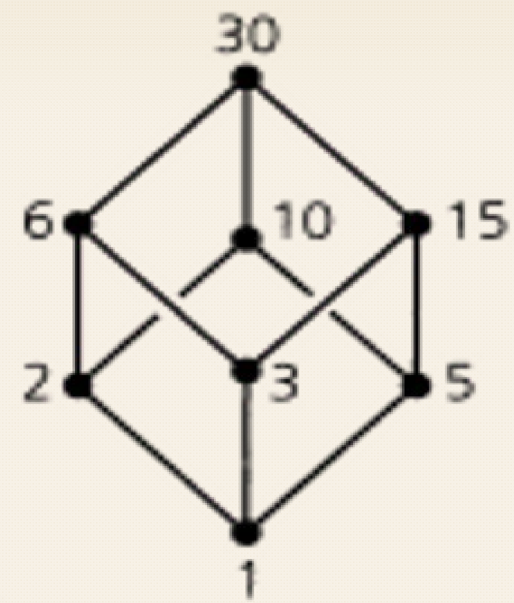
Ak $x_{1,} x_2$ sú atómy a $x_1 \neq x_{2,} x_1 x_2 = 0$

Konečná Boolova algebra s n atómami má 2^n prvkov a každý nenulový prvok sa dá napísať ako jedinečná suma atómov.

Boolova Algebra

Podobnosť Hasseho diagramov nám pripomína možnosť izomorfizmu





Boolova Algebra

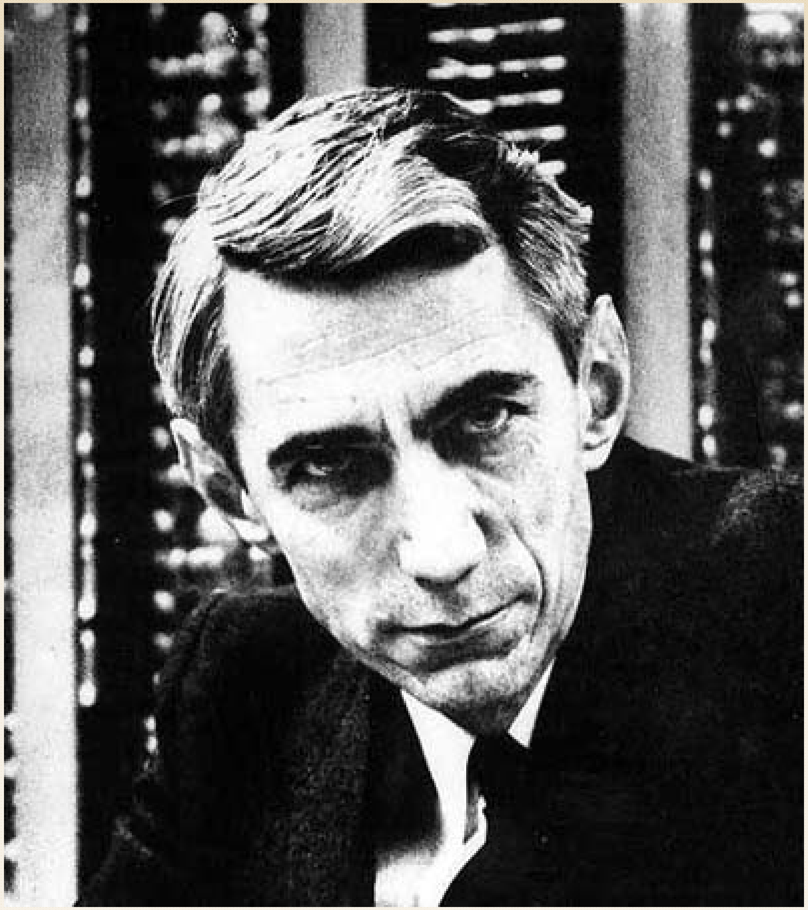
Dve algebry Ω_1 a Ω_2 nazývame izomorfnými, ak existuje bijektívne zobrazenie medzi prvkami množín Ω_1 a Ω_2 a pre všetky $x, y \in \Omega_1$ platí

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$f(x.y) = f(x).f(y)$$
$$f(\overline{x}) = \overline{f(x)}$$

(zobrazenie f zachováva operácie)

Každá konečná algebra, je izomorfná s algebrou množín

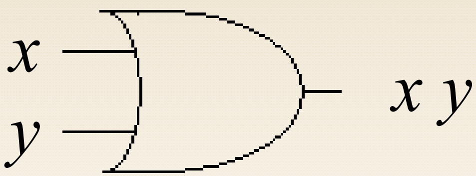
Logické obvody



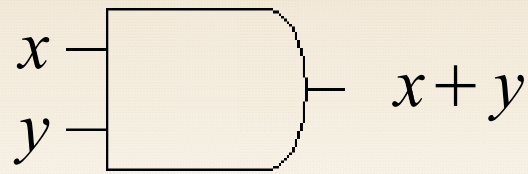
Claude Elwood Shannon
1916 – 2001

A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits

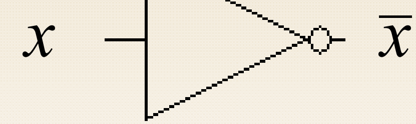
Logické obvody



OR

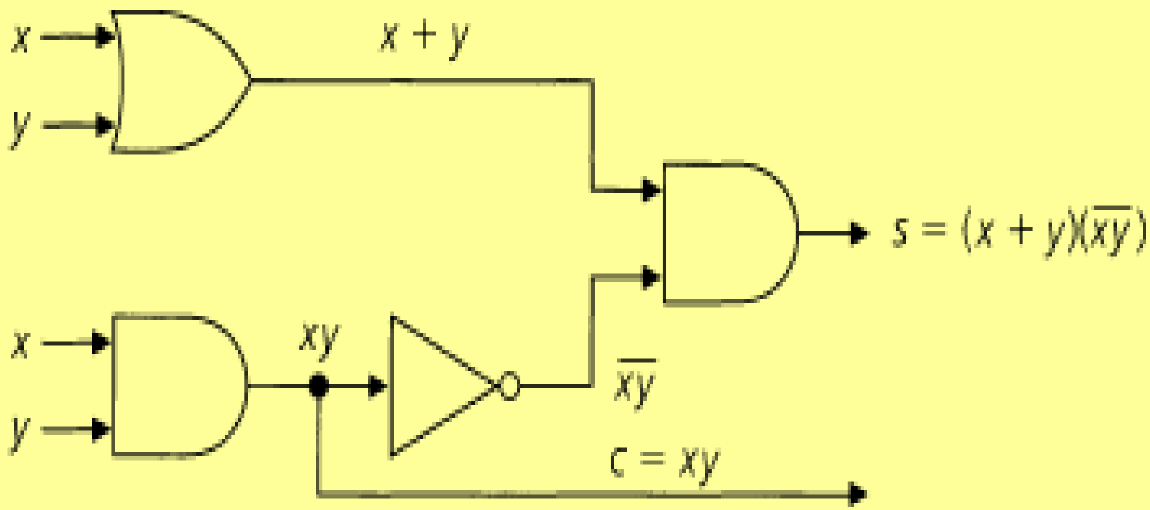


AND



NOT

Logické obvody

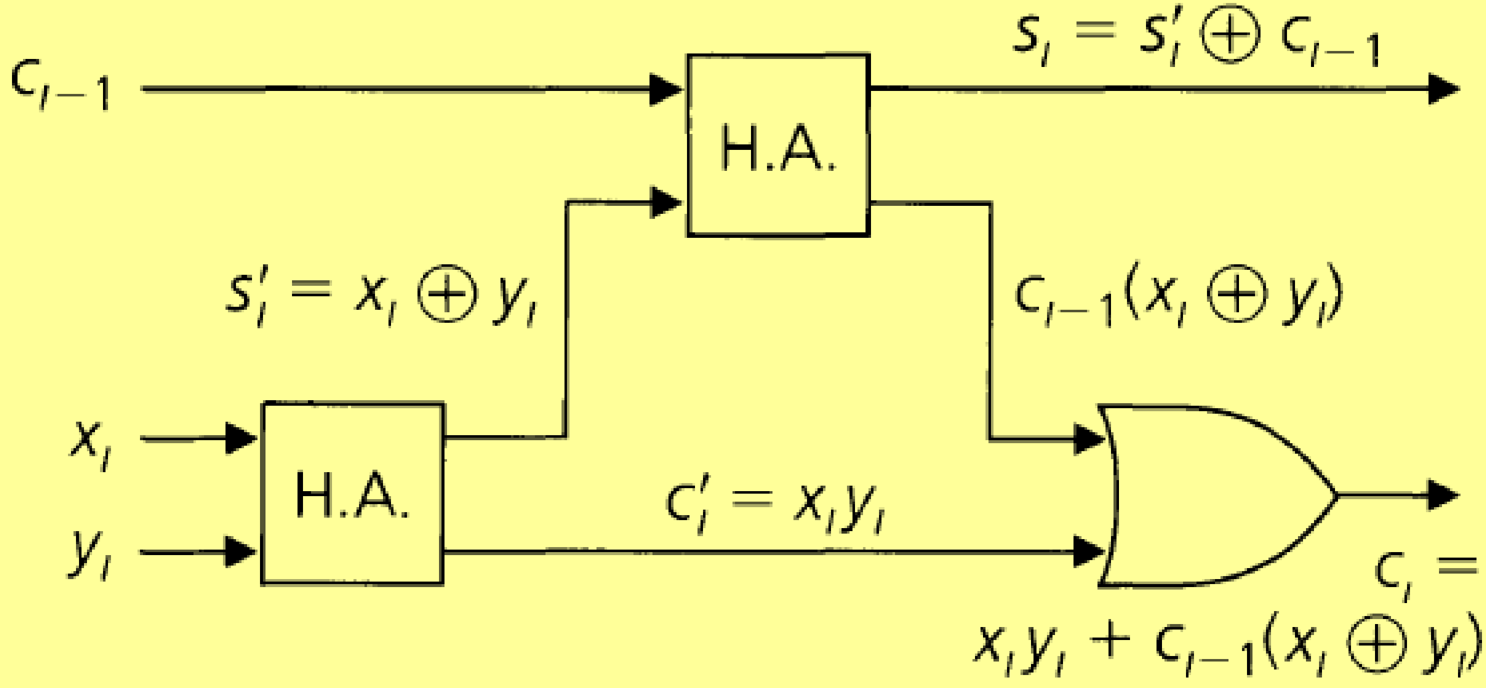


The half-adder

x	y	Sum
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

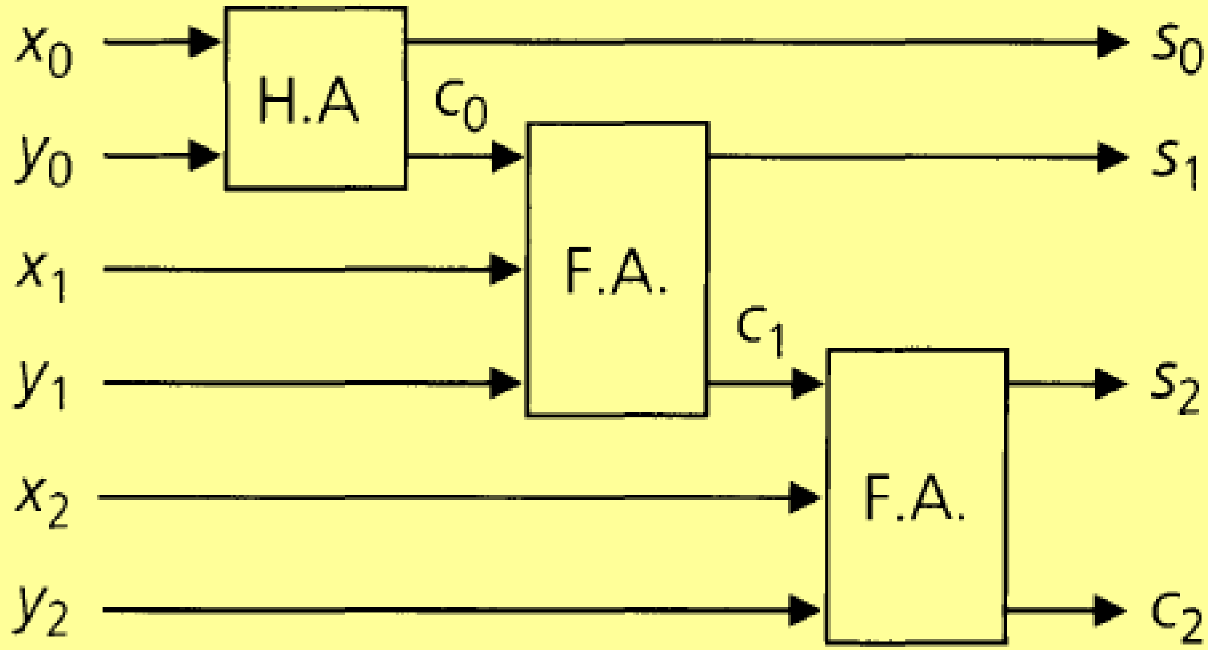
x	y	Carry
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Logické obvody



The full-adder

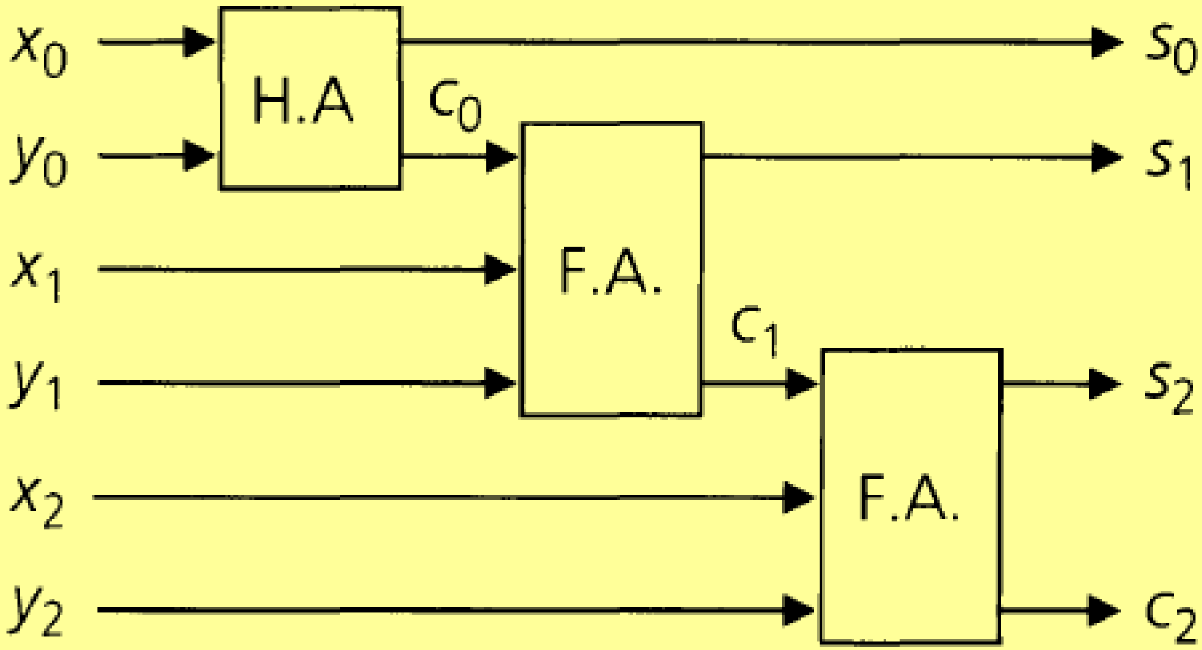
Logické obvody



$$x_2 x_1 x_0 + y_2 y_1 y_0 = c_2 s_2 s_1 S_0$$

Ščítanie dvoch trojbitových čísel

Logické obvody

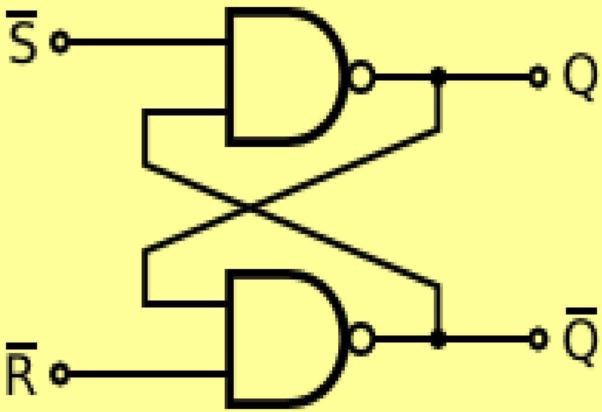


$$x_2 x_1 x_0 + y_2 y_1 y_0 = c_2 s_2 s_1 S_0$$

Ščítanie dvoch trojbitových čísel

Logické obvody

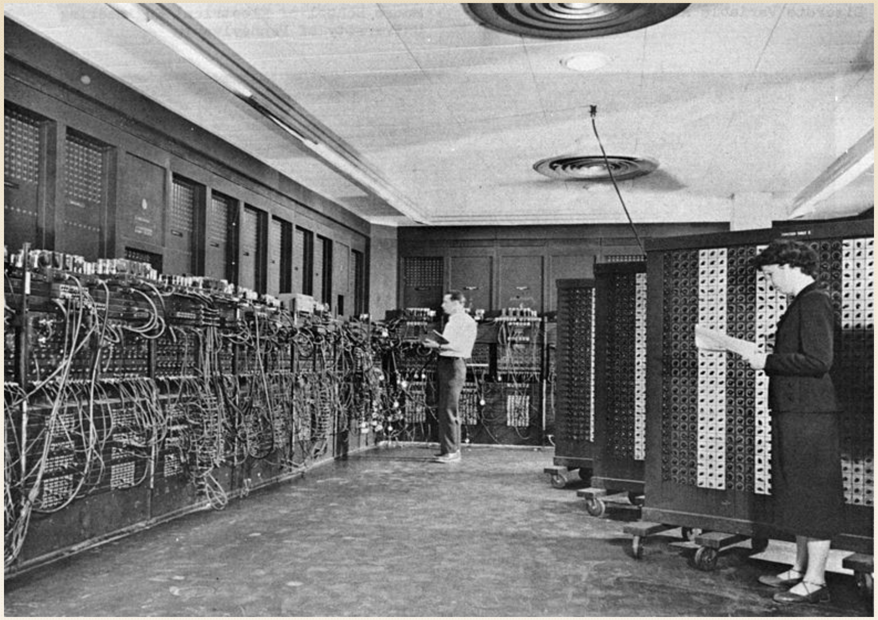
S	R	Q	
0	0	Q	zachovanie stavu
0	1	0	vynulovanie
1	0	1	nastavenie
1	1	?	zakázaný stav



$$x_2 x_1 x_0 + y_2 y_1 y_0 = c_2 s_2 s_1 S_0$$

RS klopný obvod – jednoduchá pamäť

Logické obvody



0,05 MIPS

K computer, SPARC64 VIIIfx 2.0GHz, Tofu

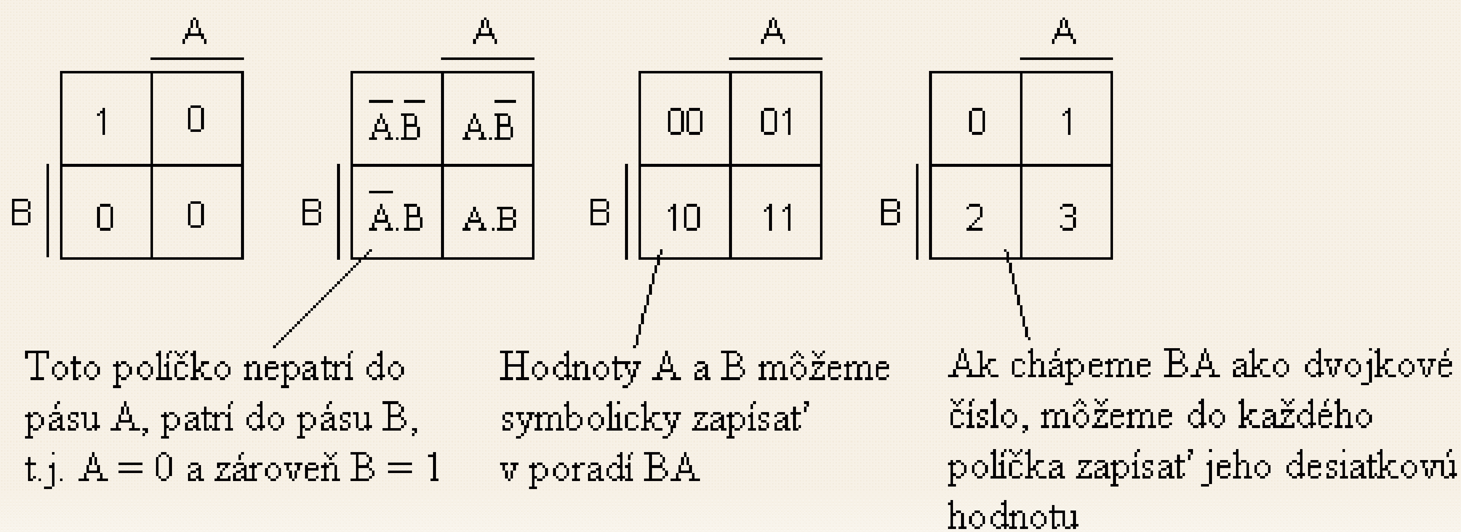
10.51 Petaflop

Karnaughova mapa

Maurice Karnaugh
1924 –

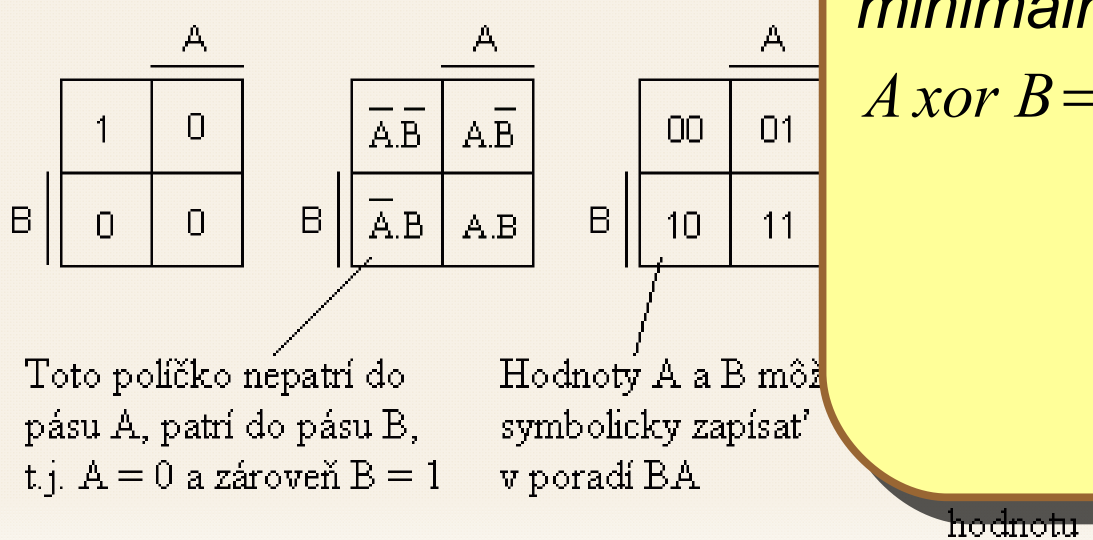
Karnaughova mapa

Karnaughova mapa je grafický zápis pravdivostnej tabuľky, kde každému riadku zodpovedá určité políčko. Mapa má preto celkom 2^N políčok, kde N je počet vstupných premenných. O každom políčku mapy môžeme povedať, či patrí do jej premennej alebo do jej negácie. Karnaughovu mapu môžeme veľmi výhodne využiť pri zjednodušovaní logických výrazov, obvykle nanajvýš štyroch premenných.



Karnaughova mapa

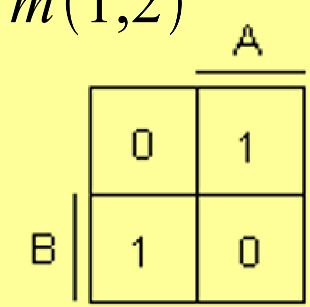
Karnaughova mapa je grafický zápis pravdivostnej tabuľky, kde každému riadku zodpovedá určité políčko. Mapa má preto celkom 2^N políčok, kde N je počet vstupných premenných. O každom políčku mapy môžeme povedať, či patrí do jej premennej alebo do jej negácie. Karnaughovu mapu môžeme veľmi ... zjednodušovaní logických výrazov, ... štyroch premenných.



Karnaughova mapa pre XOR

minimálna suma súčinov

$$A \; xor \; B = \sum m(1,2)$$



Karnaughova mapa

Príklad:

Nájdite nakratší predpis pre logickú funkciu

$$f(w,x,y,z)=\sum m(0,1,2,3,8,9,10)$$

$$\overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}+\overline{w}\,\overline{x}\,y\,\overline{z}+w\,\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}+w\,\overline{x}\,y\,\overline{z}=\overline{x}\,\overline{z}(\overline{w}\,\overline{y}+\overline{w}\,y+w\,\overline{y}+wy)=\overline{x}\,\overline{z}$$

$$\overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}+\overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}\,z+\overline{w}\,\overline{x}\,y\,z+\overline{w}\,\overline{x}\,y\,\overline{z}=\overline{w}\,\overline{x}(\overline{y}\,\overline{z}+\overline{y}\,z+y\,z+y\,\overline{z})=\overline{w}\,\overline{x}$$

$$\overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}+\overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}\,z+w\,\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}+w\,\overline{x}\,\overline{y}\,z=\overline{x}\,\overline{y}(\overline{w}\,\overline{z}+\overline{w}\,z+w\,\overline{z}+w\,z)=\overline{x}\,\overline{y}$$

$$f(w,x,y,z)=\overline{x}\,\overline{z}+\overline{w}\,\overline{x}+\overline{x}\,\overline{y}$$

$wx\,/\,yz$	$\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{y}\,z$	yz	$y\,\overline{z}$
$\overline{w}\,\overline{x}$	1	1	1	1
$\overline{w}\,x$	0	0	0	0
$w\,x$	0	0	0	0
$w\,\overline{x}$	1	1	0	1

Karnaughova mapa

Príklad: duálny problém je minimálny súčin súčtov

Nájdite nakratší predpis pre logickú funkciu

$$g(w,x,y,z)=\prod M(1,5,7,9,10,13,14,15)$$

$$(\overline{w}+x+\overline{y}+z)(\overline{w}+\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})=(\overline{w}+\overline{y}+z)+x\overline{x}=\overline{w}+\overline{y}+z+0$$

$$(w+x+y+\overline{z})(w+\overline{x}+y+\overline{z})(\overline{w}+\overline{x}+y+\overline{z})(\overline{w}+x+y+\overline{z})=y+\overline{z}$$

$$(w+\overline{x}+y\,\overline{z})(w+\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})+(\overline{w}+\overline{x}+y\,\overline{z})(\overline{w}+\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})=\overline{x}+\overline{z}$$

$$g(w,x,y,z)=(\overline{w}+\overline{y}+z)(\overline{x}+\overline{z})(\overline{y}+\overline{z})$$

wx/yz	$\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{y}z$	yz	$y\overline{z}$
$\overline{w}\,\overline{x}$	1	0	1	1
$\overline{w}x$	1	0	0	1
wx	1	0	0	0
$w\overline{x}$	1	0	1	0