
Domáca úloha Alg. štruktúry pre informatikov Zima 2011-12

Zadané: Streda, 30.novembra

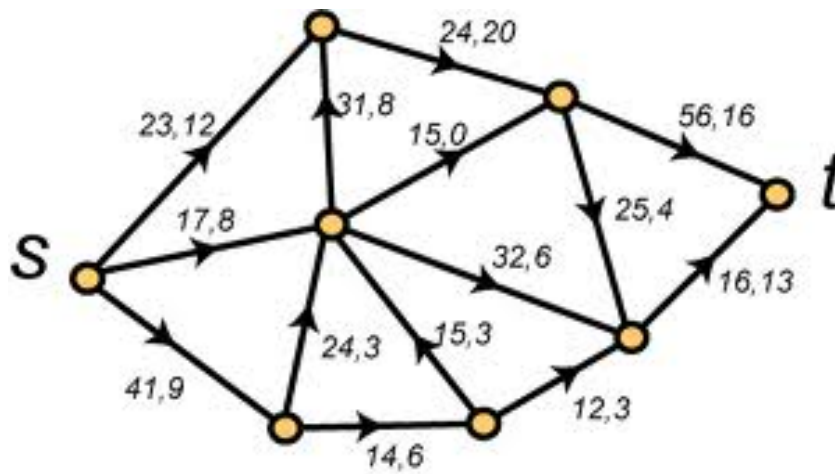
Odvzdať: Študenti, ktorí sa prihlásili na predtermín 14.12., musia túto úlohu odovzdať do 12:00 piatok 9.12. dr. Natherovi.

Všetci ostatní, do **12:00, 14.novembra**.

Príklady vypracujte podrobne. Píšte tak, aby človek, ktorý bude vašu úlohu kontrolovať mohol ľahko sledovať vaše argumenty a sled vašich myšlienok. Výsledok bez zdôvodnenia nestačí a za len výsledok (hoci správny) bez postupu nebudete môcť dostať plný počet bodov. Neodpisujte riešenia iných; napíšte len to, čomu naozaj rozumiete a čomu veríte - úlohou úlohy je sa niečo naučiť a precvičiť si. Nad príkladmi samozrejme nemusíte rozmýšľať v poradí v akom sú zadané, ale odovzdať napísané ich v tomto poradí musíte (aby sa vo vašej úlohe dalo vyznať). Viditeľne označte začiatok každého príkladu a ak riešenie niektorého príkladu neodovzdávate, napíšte aj tak jeho číslo a vynechajte trochu miesta. Ak odovzdávate úlohu na viacerých papieroch, scvaknite ich dokopy. Používajte notáciu a terminológiu, ktorú sme zaviedli na prednáške a cvičeniach. Ak potrebujete k úlohe konzultáciu, môžete prísť za Dr. Natherom (dohodnite si stretnutie e-mailom), alebo môžete navštíviť Akademické podporné centrum (= Doktorandi prvého zásahu).

Úloha je za 36 bodov

1. Ukážte, že kongruencia **mod n**, definovaná na prednáške, je relácia ekvivalencie na \mathbb{Z} ($n > 1$).
2. Nájdite $[a]^{-1}$ v \mathbb{Z}_{2011} , ak
 - (a) $a = 19$
 - (b) $a = 100$
3. Aká je pravdepodobnosť, že súčet troch náhodne vybratých (rôznych) celých čísel z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$, je deliteľný tromi?
4. Koľko deliteľov nuly a koľko prvkov s multiplikatívnym inverzom je v
 - (a) \mathbb{Z}_{17}
 - (b) \mathbb{Z}_{117}
 - (c) \mathbb{Z}_{1117}
5. Ukážte, že pre každé $n \in \mathbb{N}$, $10^n \equiv (-1)^n \pmod{11}$.
6.
 - (a) Akú postupnosť pseudonáhodných čísel vygeneruje lineárny kongruentálny generátor, kde $a = 5$, $c = 3$, $m = 19$ a jadro (seed) $x_0 = 10$?
 - (b) Uvažujte kongruentálny generátor pseudonáhodných čísel s $a = 7$, $c = 4$, $m = 9$. Nájdite jadro (seed) x_0 , ak viete, že $x_4 = 1$.
7. Nájdite maximalny tok a zodpovedajúci minimálny rez pre sieť na nasledujúcom obrázku:



8. (a) Nájdite *najdrahšiu* kostru grafu z príkladu 7.
- (b) Koľko najdrahších kostier má daný graf? Svoju odpoveď zdôvodnite.
9. Alica sa páči Borisovi, Cyrilovi a Danovi; Elena Cyrilovi a Filipovi; Greta Borisovi a Cyrilovi; Hana Filipovi, Cyrilovi a Igorovi a Julia Borisovi, Cyrilovi a Danovi.
- (a) Navrhните bipartitný graf, ktorý modeluje problém párovania pre popísanú situáciu.
- (b) Nakreslite sieť zodpovedajúcu grafu z časti a) a nájdite maximálny tok pre túto sieť. Ktoré úplné párovanie zodpovedá nájdenému maximálnemu toku?
- (c) Existuje úplné párovanie, ktoré spáruje Elenu s Filipom a Hanu s Igorom?
- (d) Dajú sa nájsť dve rôzne úplné párovania tak, že v každom z nich bude každý muž spárovať s inou ženou?