Domáca úloha Alg. štruktúry pre informatikov Zima 2011-12

Zadané: Streda, 16.novembra
Odovzdať: Do **2. decembra** do 12:00, vášmu cvičiacemu.

Príklady vypracujte podrobne. Píšte tak, aby človek, ktorý bude vašu úlohu kontrolovať mohol ľahko sledovať vaše argumenty a sled vašich myšlienok. Výsledok bez zdôvodnenia nestačí a za len výsledok (hoci správny) bez postupu nebudete môcť dostať plný počet bodov. Neodpisujte riešenia iných; napíšte len to, čomu naozaj rozumiete a čomu veríte - úlohou úlohy je sa niečo naučiť a precvičiť si. Nad príkladmi samozrejme nemusíte rozmýšľať v poradí v akom sú zadané, ale odovzdať napísané ich v tomto poradí musíte (aby sa vo vašej úlohe dalo vyznať). Viditeľne označte začiatok každého príkladu a ak riešenie niektotrého príkladu neodovzdávate, napíšte aj tak jeho číslo a vynechajte trochu miesta. Ak odvzdávate úlohu na viacerých papieroch, scvaknite ich dokopy. Používajte notáciu a terminológiu, ktorú sme zaviedli na prednáške a cvičeniach. Ak potrebujete k úlohe konzultáciu, môžte prísť za mnou alebo za vašim cvičiacim (dohodnite si stretnutie e-mailom), alebo môžte navštíviť Akademické podporné centrum (= Doktorandi prvého zásahu).

Úloha je za 32 bodov

1. (a) Nech $k \in \mathbb{Z}^+$, $k \geq 3$. Ak $G = (V, E)$ je spojitý planárny graf, v ktorom $|V| = v, |E| = e$, akaždý cyklus má dĺžku najmenej k, dokážte, že $e \leq (\frac{k}{k-2})(v-2)$.

   (b) Aká je minimálny dĺžka cyklu v $K_{3,3}$?

   (c) Použite časť a) a b) a ukážte, že $K_{3,3}$ nie je planárny.

   (d) Dokážte, že Petersonov graf nie je planárny.

2. Nech $G = (V, E)$ je spojitý neorientovaný graf bez slučiek, kde $|V| \geq 2$. Dokážte, že G obsahuje dva vrcholy v, w rovnakého stupňa, t.j. s $d(v) = d(w)$.

3. Nech $V = \{a, b, c, d, e, f\}$. Nakreslite tri neizomorfné neorientované grafy bez slučiek $G_1 = (V, E_1)$, $G_2 = (V, E_2)$ a $G_3 = (V, E_3)$, kde vo všetkých troch grafoch je $d(a) = 3$, $d(b) = d(c) = 2$ a $d(d) = d(e) = d(f) = 1$.

   (Pozn.: Tento príklad ukazuje, že grafy môžu byť neizomorfné, aj keď majú rovnaký počet vrcholov a rovnaký počet hrán a rovnakú postupnosť stupňov vrcholov. Príklad z písomky.)

4. Zakorenené Fibonacciho stromy T_n, $n \geq 1$ sú definované rekurzívne takto:

   1)T_1 je zakorenený strom obsahujúci len koreň

   2) T_2 je taký istý ako T_1.

   3) Pre $n \geq 3$, T_n je zakorenený binárny strom s T_{n-1} ako jeho ľavý podstrom a T_{n-1} ako jeho pravý podstrom.

   (a) Pre $n \geq 1$ nech l_n označuje počet listov v T_n. Nájdite a vyriešte rekurentný vzťah pre l_n.

   (b) Nech i_n označuje počet vnútorných vrcholov stromu T_n, $n \geq 1$. Nájdite a vyriešte rekurentný vzťah pre i_n.

   (c) Nájdite formulu pre v_n, počet všetkých vrcholov v T_n, $n \geq 1$.

5. Dokážte optimalitu Primovho algoritmu.

6. Nech $G = (V, E)$ je neorientovaný ováhovaný graf bez slučiek, kde každé dve rôzner hrany majú rôzne váhy. Ukážte, že G má potom jedinú najlacnejšiu kostru.

7. Nech $R = \{a + bi | a, b \in \mathbb{Z}, i^2 = -1\}$ so sčítaním a násobením definovaným takto:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

   (a) Overte, že $(R, +, \cdot)$ je obor integrity.

   (b) Nájdite všetky prvky v R, ktoré majú inverz vzhľadom na násobenie.

8. Použite váhy $2, 3, 5, 10, 10$, aby ste ukázali, že výška Huffmanovho stromu pre danú množinu váh nemusí byť jednoznačne určená. Ako by ste zmenili algoritmus, aby pre zadané váhy vždy dal Huffmanov strom minimálnej výšky?