Domáca úloha Alg. štruktúry pre informatikov Zima 2011-12

Zadané: Streda, 26. októbra
Odovzdať: V týždni od **7. novembra**, na začiatku vašich cvičení.

Príklady vypracujte podrobne. Píšte tak, aby človek, ktorý bude vašu úlohu kontrolovať mohol ľahko sledovať vaše argumenty a sled vašich myšlienok - skúste sa vžit do jeho situácie. Výsledok bez zdôvodnenia nestačí a za len výsledok (hoci správny) bez postupu nebudete môcť dostať plný počet bodov. Neodpisujte riešenia iných; napíšte len to, čomu naozaj rozumiete a čomu veríte - úlohou úlohy je sa niečo naučiť a precvičiť si. Nad príkladmi samozrejme nemusíte rozmýšľať v poradí v akom sú zadané, ale odovzdať napísané ich v tomto poradí musíte (aby sa vo vašej úlohe dalo vyznať). Viditeľne označte začiatok každého príkladu a ak rieěnie niektotrého príkladu neodovzdávate, napíšte aj tak jeho číslo a vynechajte trochu miesta. Ak odvzdávate úlohu na viacerých papieroch, scvaknite ich dokopy. Používajte notáciu a terminológiu, ktorú sme zaviedli na prednáške a cvičeniach. Príklady úlohy použite ako prípravu na **stredosemetrálnu písomku**, ktorá bude **v utorok 8.11. o 18:00 v poslucharni F1**. V piatok 4.11., kedykoľvek medzi 9:00 - 12:00 môžte prísť ku mne (I-24) na konzultácie k tejto úlohe. Okrem toho môžte samozrejme konzultovať s vašim cvičiacim, alebo navštíviť Akademické podporné centrum (= Doktorandi prvého zásahu).

Úloha je za 33 bodov

1. Dokážte, že v každom neorientovanom grafe (alebo multigrafe) je počet vrcholov nepárneho stupňa párny.
2. Nech $G = (V, E)$ je neorientovaný graf. Definujme reláciu $\mathcal{R}$ na V nasledovne: $a\mathcal{R}b$ ak $a = b$, alebo v G existuje cesta z a do b. Ukážte, že $\mathcal{R}$ je relácia ekvivalencie. Popíšte rozklad množiny V indukovaný relaciou $\mathcal{R}$.
3. Dokážte tvrdenie (bol to dôsledok) z prednášky:

   Každý planárny graf obsahuje vrchol, ktorého stupeň je nanajvýš 5.
4. (a) Nech $G = (V, E)$ je spojitý graf bez slučiek s $|V| \geq 11$. Dokážte, že aspoň jeden z grafov G, alebo jeho doplnok $\overline{G}$ nie je rovinný.

   (b) Výsledok z časti (a) je pravdivý už od $|V| \geq 9$, ale dôkaz pre $|V| = 9, 10$ je oveľa ťažší.
   Nájdite kontrapríklad k tvrdeniu v časti (a) pre $|V| = 8$.
5. Dokážte: Turnaj má vždy Hamiltonovskú cestu.
6. (a) Pomocou Eulerovej formule ukážte, že existuje práve 5 Platónskych telies.

   (b) Sú niektoré z piatich planárnych grafov, ktoré dostaneme z Platónskych telies, bipartitné?
7. Ak G_1 a G_2 sú neorientované grafy bez slučiek, dokážte, že G_1, G_2 sú izomorfné práve vtedy keď $\overline{G}_1, \overline{G}_2$ sú izomorfné.
8. Ak je na recepcii 15 hostí, je možné, aby si každý z týchto patnástich ľudí potriasol rukou s (práve) troma ďalšími učastníkmi recepcie?
9. Predpokladajme, že úplný bipartitný graf $K_{m,n}$ má 16 hrán a $m \leq n$. Určte m a n, tak aby $K_{m,n}$ obsahoval

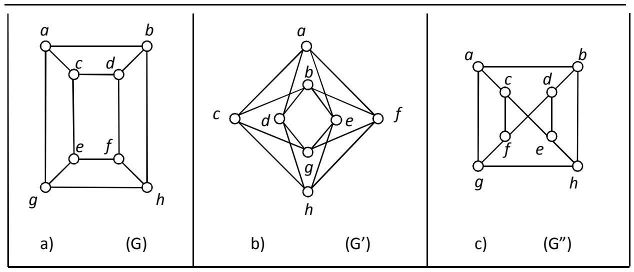
   (a) Eulerovskú kružnicu, ale nie Hamiltonovký cyklus;

   (b) aj Eulerovskú kružnicu aj Hamiltonovký cyklus.
10. Nech $G = (V, E)$ je neorientovaný graf bez slučiek. Zopakujme, že G sa nazýva *samo-komplementárny*, ak G a $\overline{G}$ sú izomorfné. Ak G je samo-komplementárny graf,

    (a) určite $|E|$, ak vieme, že $|V| = n$.

    (b) dokážte, že G je spojitý.

11. Určite, ktoré z nasledujúcich grafov sú bipartitné. Svoju odpoveď zdôvodnite.



a) (G) b) (G’) c) (G”)