ZÁKLADY MATEMATICKEJ TEÓRIE PROGRAMOV

Časť 3: Sémantika programov - sémantika funkcionálnych programov

Igor Prívara
Inštitút informatiky a štatistiky

FMFI UK Bratislava, Katedra informatiky

Základy teórie programovania

Programové schémy – abstrakcia programov

- základné pojmy, vlastnosti programových schém
- rozhodnuteľnosť vlastností programových schém
- porovnávanie tried programových schém

Správnosť programov – vzhľadom na špecifikácie

- Floydova metóda a Hoareova metóda
- indukčné techniky použité pri dokazovaní správnosti
- (systematická) konštrukcia správnych programov
- dokazovanie správnosti rekurzívnych programov

Sémantika programov – formálny význam programov

- princípy operačnej, denotačnej a axiomatickej sémantiky
- algebraická štruktúra sémantických domén
- **formálna definícia denotačného a operačného významu** imperatívnych a **rekurzívnych programov**
- **porovnanie denotačného a operačného významu programov**

Typy a sémantika – využitie typov pri definícii sémantiky

Rekurzívne funkcionálne programy

Rekurzívny program – konštrukcia, známa z funkcionálneho programovania – pozostáva zo systému rekurzívnych definícií, napr.

$$P: \quad \phi(x,y) \Longleftarrow \textbf{if } x=0 \textbf{ then } 1 \textbf{ else } \phi(x-1,\phi(x,y)) \textbf{ fi}$$

Denotačná sémantika – najmenší pevný bod rekurzívnej definície

- funkcia f je riešením rovnice $\phi(\overline{x}) = t[\phi](\overline{x})$ ak $f(\overline{x}) \equiv t[f](\overline{x})$
- jednoznačné riešenie f_t – najmenší pevný bod $t[\phi]$
- pre zjednodušenie budeme uvažovať funkcie z $D^n \mapsto D$ – nie je to na úkor všeobecnosti, výsledky platia aj pre "všeobecnejšie" funkcie
- riešenie príkladu – $f_t(x,y):$ if $x \geq 0$ then 1 else $\perp$ fi

Operačná sémantika – výpočet prepisovaním termov

- deterministický charakter výpočtu – výpočtové pravidlá
- "volanie hodnotou" – $\underline{\phi(1,0)} \rightarrow \phi(0,\underline{\phi(1,0)}) \rightarrow \cdots \rightarrow^*$
- "volanie menom" – $\underline{\phi(1,0)} \rightarrow \underline{\phi(0,\phi(1,0))} \rightarrow 1$

Vzťah operačnej a denotačnej sémantiky –

- funkcia, vypočítaná programom P s pravidlom r – c_t^r
  - $c_t^n(x,y):$ if $x \geq 0$ then 1 else $\perp$ fi
  - $c_t^v(x,y):$ if $x = 0$ then 1 else $\perp$ fi
- korektné výpočtové pravidlo r – $f_t \equiv c_t^r$
  - "volanie menom" je korektné výpočtové pravidlo
  - "volanie hodnotou" nie je korektné výpočtové pravidlo

Syntaktické obory

Symboly –

- premenné – $X =_{nt} \{x, y, x_i, \ldots\}$
- symboly funkcií $F = \cup_{i=0}^{\infty} F^i$: $\quad f \in F^n$ – $arity(f) = n$
- predikátové symboly $B = \cup_{i=0}^{\infty} B^i$: $\quad p \in B^n$ – $arity(p) = n$
- funkčné premenné $\Phi = \cup_{i=0}^{\infty} \Phi^i$: $\quad \phi \in \Phi^n$ – $arity(\phi) = n$

Termy – $Exp = \{t, t_i, \cdots\}$ resp. $Bexp = \{b, b_i, \cdots\}$

- $X \subseteq Exp$, $F^0 \subseteq Exp$, $B^0 \subseteq Bexp$
- ak $f \in F^n$, $t_1, \cdots, t_n \in Exp$, potom $f(t_1, \cdots, t_n) \in Exp$
- ak $p \in B^n$, $t_1, \cdots, t_n \in Exp$, potom $p(t_1, \cdots, t_n) \in Bexp$
- ak $b \in Bexp$, $t_1, t_2 \in Exp$, potom
  if b **then** t_1 **else** t_2 **fi** $\in Exp$
- ak $\phi \in \Phi^n$, $t_1, \cdots, t_n \in Exp$, potom $\phi(t_1, \cdots, t_n) \in Exp$

Rekurzívna definícia – $\phi(x_1, \cdots, x_n) \impliedby t[\phi](x_1, \cdots, x_n)$

Program – "telo" programu $\quad \phi_0(\overline{x}) \impliedby t_0[\phi_1, \cdots, \phi_n](\overline{x})$
so systémom rekurzívnych definícií

$$\begin{aligned}
\phi_1(\overline{x}) &\impliedby t_1[\phi_1, \cdots, \phi_n](\overline{x}) \\
\phi_2(\overline{x}) &\impliedby t_2[\phi_1, \cdots, \phi_n](\overline{x}) \\
&\vdots \\
\phi_n(\overline{x}) &\impliedby t_n[\phi_1, \cdots, \phi_n](\overline{x})
\end{aligned}$$

Obory interpretácie a sémantické obory

Interpretácia symbolov –

- obor interpretácie D_0
- symboly funkcií z F^n sú interpretované totálnymi funkciami z $D_0^n \mapsto D_0$
- obor interpretácie $W_0 = \{tt, ff\}$
- predikátové symboly z B^n sú interpretované totálnymi funkciami (predikátmi) z $D_0^n \mapsto W_0$

Sémantické obory –

diskrétne cpo –

- $D = D_0 \uplus \{\perp\}$
- $W = W_0 \uplus \{\perp\}$
- ekvivalencia – $x \equiv y$ práve vtedy, keď $x \sqsubseteq y$ a zároveň $y \sqsubseteq x$

priestor (monotónnych) funkcií – $\{f, f_i, \cdots\}$

$$D^n \mapsto D$$

Označenie – $\Omega =_{df} \perp_{(D^n \mapsto D)}$

priestor (spojitých) funkcionálov – $\{\tau, \tau_i, \cdots\}$

$$(D^n \mapsto D) \mapsto (D^n \mapsto D)$$

Monotónne funkcie z $D^n \mapsto D$

Monotónna funkcia – $\overline{d_1}, \overline{d_2} \in D^n$, ak $\overline{d_1} \sqsubseteq \overline{d_2}$, potom $f(\overline{d_1}) \sqsubseteq f(\overline{d_2})$

- monotónnosť funkcie závisí aj od oboru – porovnaj if–then–else funkcie na $D_{ft} = \{ff \sqsubseteq tt\}$ a diskrétnom cpo $D = \{\perp, tt, ff\}$.

Ekvivalencia (silná) monotónnych funkcií – $f \equiv g$

Rozšírenie (interpretovaných) totálnych funkcií –

$D_0^n \mapsto D_0$ resp. $D_0^n \mapsto \{tt, ff\}$ na $D^n \mapsto D$ resp. $D^n \mapsto \{tt, ff, \perp\}$.

Prirodzené rozšírenie – $g \in D^n \mapsto D$ je prirodzeným rozšírením $f \in D_0^n \mapsto D_0$ keď: $g(\overline{d}) = \perp$ práve vtedy, keď aspoň jeden z argumentov g je $\perp$ a pre všetky $\overline{d} \in D_0^n$ platí $g(\overline{d}) = f(\overline{d})$.

Lema: Prirodzené rozšírenie $f \in D_0^n \mapsto D_0$ je monotónnou funkciou.

Dôkaz: sporom, t.j. predpokladáme, že $f(x_1, \cdots, x_n)$ je prirodzene rozšírená ale nie monotónna funkcia. Takže existujú $\overline{a} = \langle a_1, \cdots, a_n \rangle, \overline{b} = \langle b_1, \cdots, b_n \rangle$ tak, že $\overline{a} \sqsubseteq \overline{b}$, $\forall i :\ a_i \sqsubseteq b_i$ a $f(\overline{a}) \not\sqsubseteq f(\overline{b})$. Potom zrejme $\overline{a} \sqsubset \overline{b}$ a teda $\exists i_0 : a_{i_0} \sqsubset b_{i_0}$, čo v diskrétnom obore platí len keď $a_{i_0} = \perp$. Odtiaľ $f(\overline{a}) = \perp \sqsubseteq f(\overline{b})$, čo je v spore s predokladom.

Opačné tvrdenie neplatí – ternárna if–then–else je monotónna.

if tt then x else y fi $= x$
if ff then x else y fi $= y$
if $\perp$ then x else y fi $= \perp$

Lema: Jednoargumentová funkcia je monotónna práve vtedy, keď je striktná (t.j. $f(\perp) = \perp$) alebo konštantná.

Spojité funkcionály

Cpo monotónnych funkcií – $[D^n \mapsto D]$

Funkcionál – τ je zobrazenie triedy funkcií $[D^n \mapsto D]$ do seba, t.j.

$$\tau \quad \in \quad [D^n \mapsto D] \mapsto [D^n \mapsto D]$$

Monotónny funkcionál – ak $f \sqsubseteq g$, potom $\tau[f] \sqsubseteq \tau[g]$

Monotónnosť vzhľadom na viaceré výskyty ϕ – $\tau[\phi, \phi]$

ak $f \sqsubseteq g$ potom pre každé h platí $\tau[f, h] \sqsubseteq \tau[g, h]$

Spojitý funkcionál – pre každý reťazec $\{f_i\}_0^\infty : \tau[\sqcup_0^\infty f_i] = \sqcup_0^\infty \tau[f_i]$

definícia je korektná – obe najmenšie horné hranice existujú

Príklady – spojitých a nespojitých funkcionálov:

1. $\tau[\phi] :_s \ \phi$
2. $\tau[\phi] :_s \ h$
3. $\tau[\phi](x) :_s$ if $x = 0$ then 1 else $\phi(x+1)$ fi
4. $\tau[\phi](x) :_s$ if $x = 0$ then 1 else $\phi(x-1)$ fi
5. $\tau[\phi](x) :_m$ if $(\forall y \in N)[\phi(y) = y]$ then $\phi(x)$ else $\perp$ fi
6. $\tau[\phi](x) :_n$ if $\phi(x) \equiv \perp$ then 0 else $\perp$ fi
7. $\tau[\phi](x) :_s$ if $\phi(x) = \perp$ then 0 else $\perp$ fi

Monotónne vs. spojité funkcie

Lema: Kompozícia dvoch monotónnych funkcií je monotónna funkcia.

Veta: Funkcionál τ zodpovedajúci termu t, ktorý je definovaný kompozíciou monotónnych funkcií a funkčnej premennej ϕ, je spojitý.

Dôkaz: indukciou vzhľadom na konštrukciu t. V prípade, že $t = \phi$ alebo $t = h$ je dôkaz tvrdenia zrejmý. Pri indukcii rozlíšime dva prípady:

1. $t[\phi] = f(t_1[\phi], \cdots, t_n[\phi])$, kde f je nejaká monotónna funkcia. Na základe indukčného predpokladu spojitosti zodpovedajúcich funkcionálov $\tau_1 \cdots, \tau_n$ ukážeme spojitosť τ.
   - Nech $g \sqsubseteq h$, potom z monotónnosti τ_i vyplýva $\forall i:\ \tau_i[g] \sqsubseteq \tau_i[h]$. Odtiaľ z monotónnosti f dostaneme $\tau[g] = f(\tau_1[g], \cdots, \tau_n[g]) \sqsubseteq f(\tau_1[h], \cdots, \tau_n[h]) = \tau[h]$.
   - Pretože $\forall i:\ f_i \sqsubseteq \sqcup_0^\infty f_i$, z monotónnosti τ_i a f vyplýva $\tau[f_i] \sqsubseteq \tau[\sqcup_0^\infty f_i]$ a teda aj $\sqcup_0^\infty \tau[f_i] \sqsubseteq \tau[\sqcup_0^\infty f_i]$. Analogicky sa dá ukázať aj opačná inklúzia a teda spojitosť τ.
2. $t[\phi] = \phi(t_1[\phi], \cdots, t_n[\phi])$, kde ϕ je funkčná premenná. Opäť treba dokázať, že keď sú zodpovedajúce funkcionály $\tau_1, \cdots, \tau_n$ spojité, má túto vlastnosť aj τ. Dôkaz prebieha analogicky ako v prípade 1, namiesto monotónnosti f sa využíva monotónnosť f_i a $\sqcup_0^\infty f_i$.

Lema: Každá spojitá funkcia je monotónna.

Dôkaz: Nech $x \sqsubseteq y$, potom

$$f(x) \sqsubseteq \sqcup\{f(x), f(y)\} =_{spoj.} f(\sqcup\{x, y\}) = f(y)$$

Pevné body funkcionálov

Pevný bod – funkcia $f \in [D^n \mapsto D]$ je pevným bodom funkcionálu τ ak $\tau[f] \equiv f$.

Najmenší pevný bod – f je najmenším pevným bodom τ ak pre každý iný pevný bod g toho istého funkcionálu τ platí $f \sqsubseteq g$.

Veta o rekurzii – Kleene: Každý spojitý funkcionál τ má (jediný) najmenší pevný bod

$$f_\tau =_{df} \sqcup_0^\infty \tau^i[\Omega],$$

kde $\tau^0[\Omega] =_{df} \Omega$ a $\tau^{i+1}[\Omega] =_{df} \tau[\tau^i[\Omega]]$.

Dôkaz: keďže τ je spojitý, je aj monotónny funkcionál – t.j. $\{\tau^i[\Omega]\}_0^\infty$ je reťazec v cpo $[D^n \mapsto D]$.

- f_τ je pevný bod τ, pretože $\tau[f_\tau] \equiv \tau[\sqcup_0^\infty \tau^i[\Omega]] \equiv_{spoj} \sqcup_0^\infty \tau^{i+1}[\Omega] \equiv f_\tau$.
- f_τ je najmenší pevný bod τ, pretože pre ľubovoľný pevný bod g a všetky $i \geq 0$ platí $\tau^i[\Omega] \sqsubseteq g$ (indukciou vzhľadom na i s využitím predpokladu spojitosti τ). Odtiaľ $\sqcup_0^\infty \tau^i[\Omega] = f_\tau \sqsubseteq g$.

Konštrukcia riešenia rovnice – $\phi(\overline{x}) = t[\phi](\overline{x})$

- definovať postupnosť aproximácií $\tau^i[\Omega]$ pre všetky $i \geq 0$,
- zostrojiť najmenšiu hornú hranicu reťazca $\sqcup_0^\infty \tau^i[\Omega]$.

Príklady pevných bodov – $N_\perp = N \uplus \{\perp\}$

- **Funkcionál** – $\tau[\phi](x):$ if $x = 0$ then 1 else $x.\phi(x-1)$ fi

  Postupnosť zodpovedajúcich aproximácií

  $$\tau^i[\Omega](x): \text{ if } x < i \text{ then } x! \text{ else } \perp \text{ fi}$$

  Najmenší pevný bod

  $$f_\tau = \sqcup_0^\infty \tau^i[\Omega] = x!$$

$\tau^0[\Omega] = \Omega$

$\tau^1[\Omega](x) =$ if $x = 0$ then 1 else $x.\ \tau^0[\Omega](x-1)$ fi $\equiv$
$\equiv$ if $x = 0$ then 1 else $\perp$ fi

$\tau^2[\Omega](x) =$ if $x = 0$ then 1 else $x.\ \tau^1[\Omega](x-1)$ fi $\equiv$
$\equiv$ if $x = 0$ then 1 else $x.$ if $x - 1 = 0$ then 1 else $\perp$ fi fi $\equiv$
$\equiv$ if $x = 0$ then 1 else if $x = 1$ then x else $\perp$ fi fi $\equiv$
$\equiv$ if $x < 2$ then $x!$ else $\perp$ fi

$\tau^3[\Omega](x) =$ if $x = 0$ then 1 else $x.\ \tau^2[\Omega](x-1)$ fi $\equiv$
$\equiv$ if $x = 0$ then 1 else $x.$ if $x - 1 < 2$ then $x!$ else $\perp$ fi fi $\equiv$
$\equiv$ if $x = 0$ then 1 else if $x < 3$ then $x.x - 1!$ else $\perp$ fi fi $\equiv$
$\equiv$ if $x < 3$ then $x!$ else $\perp$ fi

Príklady pevných bodov – $N_\perp = N \uplus \{\perp\}$

1. $\tau[\phi](x):$ if $x = 0$ then 1 else $\phi(x+1)$ fi

   Pevnými bodmi pre $n \in N_\perp$ sú funkcie $f_n(x):$ if $x = 0$ then 1 else n fi. Najmenšou z nich je $f_\tau(x):$ if $x = 0$ then 1 else $\perp$ fi.

2. $\tau[\phi](x):$ if $x > 100$ then $x - 10$ else $\phi(\phi(x+11))$ fi

   Najmenším pevným bodom τ je funkcia:

   $$f_\tau : \text{ if } x > 100 \text{ then } x - 10 \text{ else } 91 \text{ fi.}$$

3. $\tau[\phi](x):$ if $\phi(x) \equiv 0$ then 1 else 0 fi

   Funkcionál τ nie je monotónny a nemá žiadny pevný bod.

4. $\tau[\phi](x):$ if $\phi(x) \equiv 0$ then 0 else 1 fi

   Funkcionál τ má dva neporovnateľné pevné body, funkcie $g:\ 0$ a $h:\ 1$,
   nemá však najmenší pevný bod.

5. $\tau[\phi](x, y):$ if $x = y$ then $y + 1$ else $\phi(x, \phi(x-1, y+1))$ fi

   Funkcionál τ má tri pevné body, h_τ je najmenším z nich.

   $$\begin{aligned} f_\tau(x,y) &: \text{ if } x = y \text{ then } y+1 \text{ else } x+1 \text{ fi} \\ g_\tau(x,y) &: \text{ if } x \geq y \text{ then } x+1 \text{ else } y-1 \text{ fi} \\ h_\tau(x,y) &: \text{ if } x \geq y \wedge (x - y \text{ párne}) \text{ then } x+1 \text{ else } \perp \text{ fi} \end{aligned}$$

Sémantika rekurzívnych programov

Sémantika booleovských výrazov –

$$\mathcal{W}: \ Bexp \mapsto [D^n \mapsto W]$$

- $\mathcal{W}\| p(t_1, \cdots, t_n) \| =_{df} \beta(\mathcal{V}\| t_1 \|, \cdots, \mathcal{V}\| t_n \|)$,
  kde β je prirodzené rozšírenie interpretácie symbolu p

Sémantika výrazov –

$$\mathcal{V}: \ Exp \mapsto [D^n \mapsto D]$$

- $\mathcal{V}\| x \| =_{df} x$
- $\mathcal{V}\| f_F(s_1, \cdots, s_n) \| =_{df} \pi(\mathcal{V}\| s_1 \|, \cdots, \mathcal{V}\| s_n \|)$,
  kde π je prirodzené rozšírenie interpretácie symbolu f_F
- $\mathcal{V}\| \textbf{if } b \textbf{ then } t_1 \textbf{ else } t_2 \textbf{ fi} \| =_{df}$
  if $\mathcal{W}\| b \|$ then $\mathcal{V}\| t_1 \|$ else $\mathcal{V}\| t_2 \|$ fi
- $\mathcal{V}\| \phi(s_1, \cdots, s_n) \| =_{df} f_t(\mathcal{V}\| s_1 \|, \cdots, \mathcal{V}\| s_n \|)$,
  kde f_t je najmenší pevný bod rovnice $\phi(\overline{x}) = t[\phi](\overline{x})$, t.j. funkcionálu $\mathcal{V}\| t[\phi](\overline{x}) \|$

Sémantika programu – s telom $\lambda x_1, \cdots, x_n.\ t_o[\phi]$

$$\mathcal{M}: \ Exp \mapsto [D^n \mapsto D]$$

- $\mathcal{M}\| P \| =_{df} \mathcal{V}\| t_o[\phi](x_1, \cdots, x_n) \|$

Systémy rekurzívnych definícií

Riešenie systému rekurzívnych definícií –

$$\begin{aligned} \phi_1(\overline{x}) &\Longleftarrow t_1[\phi_1, \cdots, \phi_n](\overline{x}) \\ &\vdots \\ \phi_n(\overline{x}) &\Longleftarrow t_n[\phi_1, \cdots, \phi_n](\overline{x}) \end{aligned}$$

Usporiadanie – $\langle f_1, \cdots, f_n \rangle \sqsubseteq \langle g_1, \cdots, g_n \rangle$ práve vtedy, keď $f_i \sqsubseteq g_i$ pre všetky i.

Monotónnosť – n–tica $\langle f_1, \cdots, f_n \rangle$ je monotónna, ak je monotónna každá funkcia f_i.

Funkcionál – funkcionál $\tau = \langle \tau_1[\phi_1, \cdots, \phi_n], \cdots, \tau_n[\phi_1, \cdots, \phi_n] \rangle$ zobrazuje n–ticu funkcií $\langle f_1, \cdots, f_n \rangle$ do n–tice $\langle g_1, \cdots, g_n \rangle$.

Najmenší pevný bod – n–tica funkcií $\langle f_1, \cdots, f_n \rangle$ je najmenším pevným bodom systému rekurzívnych definícií ak f_i je najmenším pevným bodom rovnice $\phi_i = t_i[\phi_1, \cdots, \phi_n]$ – funkcionálu $\mathcal{V}[\![t_i[\phi_1, \cdots, \phi_n]]\!]$.

Spojitý funkcionál – funkcionál $\tau = \langle \tau_1, \cdots, \tau_n \rangle$ je spojitý, ak sú spojité všetky τ_i.

Veta 1: Funkcionál τ_i, zodpovedajúci termu t_i zloženému z monotónnych funkcií a funkčných premenných $\phi_1, \cdots, \phi_n$, je spojitý.

Veta 2: Každý spojitý funkcionál τ má najmenší pevný bod

$$f_\tau = \langle f_{\tau_1}, \cdots, f_{\tau_n} \rangle.$$

Systémy na prepisovanie termov

Prepisovacie pravidlo – orientovaná rovnosť

$$l \mapsto r$$

- $l, r \in T(F, X)$ – termy nad symbolmi F a premennými X
- $Var(r) \subseteq Var(l)$

Systém na prepisovanie termov – trs (term rewriting system)

$$R = \{l_1 \mapsto r_1, \cdots, l_n \mapsto r_n\}$$

- konečná množina prepisovacích pravidiel

Prepisovací krok – krok odvodenia systémom R

$$s \rightarrow_R t$$

- $l \mapsto r \in R$
- $s/\alpha = u = \sigma l$
- $t = s[\alpha \leftarrow \sigma r]$

Prepisovanie termov

R–redex – podterm $u = t/\alpha$ termu t je R–redexom, ak existujú pravidlo $l \mapsto r \in R$ a substitúcia σ také, že $u = \sigma l$,

R–reducibilný term – term t je R–reducibilný, ak existuje term u taký, že $t \rightarrow_R u$ (obsahuje R–redex),

R–ireducibilný term – term t je R–ireducibilný, ak sa nedá prepísať žiadnym pravidlom z R, t.j. neobsahuje žiadny R–redex,

R–odvodenie – výpočtová postupnosť $s_1 \rightarrow_R s_2 \rightarrow_R \cdots \rightarrow_R s_n$,

R–redukčná relácia – relácia $\rightarrow_R^*$, t.j. reflexívny a tranzitívny uzáver "prepisovacej" relácie $\rightarrow_R$,

R–normálny tvar – term u je R–normálnym tvarom termu t, ak existuje R–odvodenie $t \rightarrow_R^* u$ a u je R–ireducibilný term,

R–normálne odvodenie – R–odvodenie $s \rightarrow_R^* t$ je R–normálne, ak t je R–normálnym tvarom termu s,

R–spojenie – termy s, t sú R–spojiteľné $s \downarrow_R t$, ak existuje term u taký, že $s \rightarrow_R^* u$ a $t \rightarrow_R^* u$.

Vlastnosti prepisovacích systémov

Nedeterministický vypočtový model – pripúšťa

- R–odvodenia z termu t s rôznymi R–normálnymi tvarmi,
- nekonečné R–odvodenia.

Normalizácia – prepisovací systém R je

- (slabo) normalizujúci, ak pre každý uzavretý term $t \in T(F)$ existuje R–normálne odvodenie,
- **jednoznačne normalizujúci**, ak pre ľubovoľný uzavretý term $s \in T(F)$ a R–normálne odvodenia $s \to_R^* t, s \to_R^* u$ platí $t = u$.

Zastavenie – prepisovací systém R sa zastaví

- neexistuje nekonečné R–odvodenie – **neotherovský systém**

$$s_1 \to_R s_2 \to_R \cdots \to_R s_n \to_R \cdots$$

Konvergencia – konvergentný prepisovací systém R

- jednoznačne normalizujúci + neotherovský systém.

Výpočet rekurzívnych programov

Operačná sémantika – pre každý program $P: \ \{t_0[\overline{\phi}](x_1, \cdots, x_n), \mathcal{R}\}$ (kde $\mathcal{R}$ je systém rekurzívnych definícií) a ľubovoľné vstupné hodnoty (valuáciu premenných) $d_1, \cdots, d_n$ treba definovať výpočtovú postupnosť termov $t_0, t_1, \cdots, t_n, \cdots$.

Krok výpočtu – term t_{i+1} dostaneme prepísaním termu t_i pomocou **zjednodušujúcich a substitučných** pravidiel:

- zjednodušenie podvýrazov na základe vlastností interpretovaných funkcií (napr. $1+4 \to 5,\ 0\,.\,x \to 0,\ 0=1 \to \mathit{ff},\ \mathit{true} \wedge x \to x$),
- výber podmnožiny funkčných premenných v terme t_i na základe daného **výpočtového pravidla**,
- substitúcia funkčných premenných, vybraných výpočtovým pravidlom, pravými stranami zodpovedajúcich rekurzívnych definícií.

Zjednodušenie – predpokladáme, že zjednodušujúce pravidlá spĺňajú podmienku **konfluentnosti** odvodení

$$\forall t, u, v: \ (t \to^* u \ \wedge \ t \to^* v) \quad \exists w: \ (u \to^* w \ \wedge \ v \to^* w).$$

Potom nie je podstatné, v akom poradí sa term zjednodušuje.

Výpočtové pravidlo – algoritmus, ktorého výsledkom je pre ľubovoľný term t konečná, **neprázdna** podmnožina výskytov funkčných premenných z t.

Ukončenie výpočtu – term t_i je výsledkom výpočtu, ak neobsahuje funkčné premenné a nedá sa upraviť zjednodušujúcimi pravidlami.

Nekonečné výpočty – nekonečná výpočtová postupnosť.

Výpočtové pravidlá

$$\phi_1(0, \phi_2(1)) + \phi_1(\phi_2(2), \phi_2(3))$$

pravidlo LIS – "volanie hodnotou" – vyberie najľavejší výskyt funkčnej premennej, ktorého podtermy neobsahujú funkčnú premennú (leftmost–innermost)

$\phi_1(0, \underline{\phi_2}(1)) + \phi_1(\phi_2(2), \phi_2(3))$

pravidlo LOS – "volanie menom" – vyberie najľavejší výskyt funkčnej premennej (leftmost–outermost)

$\underline{\phi_1}(0, \phi_2(1)) + \phi_1(\phi_2(2), \phi_2(3))$

pravidlo PIS – vyberie všetky výskyty funkčných premenných, ktorých podtermy neobsahujú funkčné premennú (parallel–innermost)

$\phi_1(0, \underline{\phi_2}(1)) + \phi_1(\underline{\phi_2}(2), \underline{\phi_2}(3))$

pravidlo POS – vyberie všetky vonkajšie výskyty funkčnej premennej, t.j. výskyty, ktoré nie sú v podterme nejakej funkčnej premennej (parallel–outermost)

$\underline{\phi_1}(0, \phi_2(1)) + \underline{\phi_1}(\phi_2(2), \phi_2(3))$

pravidlo FAS – vyberie všetky výskyty s voľným argumentom, t.j. tie, ktoré majú aspoň jeden argument nezávislý od ϕ (free argument)

$\underline{\phi_1}(0, \underline{\phi_2}(1)) + \phi_1(\underline{\phi_2}(2), \underline{\phi_2}(3))$

pravidlo FS – vyberie všetky výskyty funkčnej premennej (full)

$\underline{\phi_1}(0, \underline{\phi_2}(1)) + \underline{\phi_1}(\underline{\phi_2}(2), \underline{\phi_2}(3))$

Výpočtové pravidlá – pokračovanie

$$\phi(x) \;\Longleftarrow\; \textbf{if } x > 100 \textbf{ then } x - 10 \textbf{ else } \phi(\phi(x+11)) \textbf{ fi}$$

pravidlo LIS – leftmost–innermost substitution

$$\underline{\phi}(99) \;\to\; \phi(\underline{\phi}(110)) \;\to\; \underline{\phi}(100) \;\to\; \phi(\underline{\phi}(111)) \;\to\; \underline{\phi}(101) \;\to\; 91$$

pravidlo LOS – leftmost–outermost substitution

$$\begin{aligned} &\underline{\phi}(99) \;\to\; \underline{\phi}(\phi(110)) \;\to \\ &\textbf{if } \underline{\phi}(110) > 100 \textbf{ then } \phi(110) - 10 \textbf{ else } \phi(\phi(\phi(110)+11)) \textbf{ fi} \;\to \\ &\underline{\phi}(\phi(\phi(110)+11)) \;\to^{*} \;\cdots \end{aligned}$$

pravidlo PIS – parallel–innermost substitution

$$\underline{\phi}(99) \;\to\; \phi(\underline{\phi}(110)) \;\to\; \underline{\phi}(100) \;\to\; \phi(\underline{\phi}(111)) \;\to\; \underline{\phi}(101) \;\to\; 91$$

pravidlo POS – parallel–outermost substitution

$$\begin{aligned} &\underline{\phi}(99) \;\to\; \underline{\phi}(\phi(110)) \;\to \\ &\textbf{if } \underline{\phi}(110) > 100 \textbf{ then } \underline{\phi}(110) - 10 \textbf{ else } \underline{\phi}(\phi(\phi(110)+11)) \textbf{ fi} \;\to^{*} \end{aligned}$$

pravidlo FAS – free argument substitution

$$\underline{\phi}(99) \;\to\; \phi(\underline{\phi}(110)) \;\to\; \underline{\phi}(100) \;\to\; \phi(\underline{\phi}(111)) \;\to\; \underline{\phi}(101) \;\to\; 91$$

pravidlo FS – full substitution

$$\underline{\phi}(99) \;\to\; \underline{\phi}(\underline{\phi}(110)) \;\to\; \underline{\phi}(\underline{\phi}(111)) \;\to\; 91$$

Operačná v/v sémantika

Program – pozostáva z tela programu (vstupného termu $\phi(x_1, \cdots, x_n)$) a rekurzívnej definície funkčnej premennej ϕ

$$P: \ \{\phi(\overline{x}); \ \phi(\overline{x}) \ \Longleftarrow \ t[\phi](\overline{x})\}.$$

Denotačný význam – najmenší pevný bod f_P termu t v programe P.

Operačný význam – funkcia vypočítaná programom P na základe pevne zvoleného pravidla r:

$$c_P^r(\overline{d}) = \begin{cases} t & \text{ak výpočtová postupnosť končí termom } t : \phi(\overline{d}) \to_{P,r}^{*} t \\ \perp & \text{ak je výpočtová postupnosť nekonečná.} \end{cases}$$

Symbolický výpočet – výpočet na úrovni rekurzívnych schém, uvažujeme len neinterpretované termy;

- pri výpočte dajú použiť iba substitučné pravidlá; označenie

$$s \to_{P,r} t \qquad s \to_{P,r}^{*} t \qquad\qquad s \to_P t \qquad s \to_P^{*} t.$$

“Interpretovaný" výpočet – v jazyku, definovanom triedou prípustných interpretácií ($t^{\mathcal{I}}$ označenie termu t v interpretácii $\mathcal{I}$):

- $\mathcal{L}_1$ – monotónne funkcie a paralelná interpretácia if–then–else,
- $\mathcal{L}_2$ – striktné funkcie a sekvenčná interpretácia if–then–else.

Formálna operačná sémantika rekurzívnych programov

Prepisovací systém – $P = R + Z$

- R – množina interpretovaných rekurzívnych definícií daného rekurzívneho programu,
- Z – kánonický prepisovací systém zodpovedajúci pravidlám, ktoré charakterizujú vlastnosti preddefinovaných funkcií (zjednodušujúce pravidlá).

Výpočtový krok – $s \Rightarrow_P t \quad \equiv \quad \rightarrow_R^{val} \rightarrow_Z^*$

- krok výpočtu je definovaný "metapravidlom", riadiacim poradie aplikácií prepisovacích pravidiel P,
- pri kroku $\rightarrow_R^{val}$ sa redukuje najľavejší z najvnútornejších R–redexov termu s (t.j. najľavejší podterm termu s, ktorého vlastné podtermy neobsahujú symboly funkčných premenných – volanie hodnotou),
- krokom $\rightarrow_Z^*$ sa (príslušný) term prepíše do Z–normálneho tvaru.

Výsledok výpočtu – P–normálny term t

- t neobsahuje symbol funkčnej premennej,
- t je Z–ireducibilný term.

Výpočtový diagram

Výpočtový diagram $\mathcal{D}_t$ – k termu t v programe P tvorí množina termov $\{s : \ t \to_P^* s\}$, čiastočne usporiadaná reláciou $u \unlhd v$ práve vtedy, keď $u \to_P^* v$ (nekonečný strom).

Príklad: uvažujme definíciu $t[\phi, \phi]$ s dvomi výskytmi premennej ϕ:

$$\phi \to_P t[\phi,\phi] \to_P \begin{cases} t[t[\phi,\phi],\phi] & \to_P \ \cdots \\ t[\phi,t[\phi,\phi]] & \to_P \begin{cases} t[t[\phi,\phi],t[\phi,\phi]] & \to_P \ \cdots \\ t[\phi,t[t[\phi,\phi],\phi]] & \to_P \ \cdots \\ t[\phi,t[\phi,t[\phi,\phi]]] & \to_P \ \cdots \\ \cdots \end{cases} \\ t[t[\phi,\phi],t[\phi,\phi]] & \to_P \ \cdots \end{cases}$$

Lema: Ak pre termy $u, v \in \mathcal{D}_t$ platí $u \unlhd v$, potom pri každej (monotónnej) interpretácii $\mathcal{I}$ platí $u^{\mathcal{I}}[\Omega] \sqsubseteq v^{\mathcal{I}}[\Omega]$.

Dôkaz: indukciou vzhľadom na konštrukciu termu s využitím monotónnosti interpretovaných funkcií.

Cesta v $\mathcal{D}_t$ zodpovedajúca pravidlu r a vstupu $\overline{d}$ –
Nech $s_0^{\mathcal{I}}[\Omega] \sqsubseteq s_1^{\mathcal{I}}[\Omega] \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq s_n^{\mathcal{I}}[\Omega] \sqsubseteq \cdots$ je interpretovaný reťazec, zodpovedajúci ceste $s_0 \to_{P,r} s_1 \to_{P,r} \cdots \to_{P,r} s_n \to_{P,r}^* \cdots$.
Potom platí

$$c_P^r(\overline{d}) = \sqcup_0^\infty \{s_i^{\mathcal{I}}[\Omega](\overline{d})\}.$$

Kánonická cesta – $\phi \to_{FS} t[\phi,\phi] \to_{FS} t[t[\phi,\phi],t[\phi,\phi]] \to_{FS}^* \cdots$.
Interpretáciou kanonickej cesty dostaneme reťazec identický s Kleeneho charakterizáciou najmenšieho pevného bodu:

$$\Omega \sqsubseteq t^{\mathcal{I}}[\Omega] \sqsubseteq (t^{\mathcal{I}})^2[\Omega] \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq (t^{\mathcal{I}})^n[\Omega] \sqsubseteq \cdots$$

Korektnosť výpočtových pravidiel

Korektné výpočtové pravidlo – výpočtové pravidlo r je korektné, ak pre každý program P platí $f_P \equiv c_P^r$, t.j.

$$\forall \overline{d} : \; c_P^r(\overline{d}) \equiv f_P(\overline{d}).$$

Lema: Pravidlá LIS, PIS, LOS nie sú v jazyku $\mathcal{L}_1$ korektné.

Dôkaz: Uvažujme rekurzívny program s rekurzívnou definíciou

$$\phi(x, y) \Longleftarrow \textbf{ if } x = 0 \textbf{ then } 0 \textbf{ else } \phi(x+1, \phi(x, y)) * \phi(x-1, \phi(x, y)) \textbf{ fi}$$

a paralelnou interpretáciou operácie $*$ násobenia, t.j. $0 * \bot = \bot * 0 = 0$. Potom $f_P(x, y)$: if $x \equiv \bot$ then $\bot$ else 0 fi ale PIS, LIS a LOS výpočty sa neskončia a preto $c_P^{LIS}(1, 0) = c_P^{PIS}(1, 0) = c_P^{LOS}(1, 0) = \bot$.

Poznámka: pre pravidlo POS (FAS, FS) kontrapríklad nefunguje:

$$\underline{\phi}(1, 0) \to \underline{\phi}(0, \phi(1, 0)) \to [\phi(3, \phi(2, \phi(1, 0))) * \phi(1, \phi(2, \phi(1, 0)))] * 0 \to 0.$$

Lema: Pravidlá LIS a PIS nie sú v jazyku $\mathcal{L}_2$ korektné.

Dôkaz: Pre rekurzívny program s definíciou

$$\phi(x, y) \Longleftarrow \textbf{ if } x = 0 \textbf{ then } 1 \textbf{ else } \phi(x-1, \phi(x, y)) \textbf{ fi}$$

platí $f_P(x, y)$: if $x \geq 0$ then 1 else $\bot$ fi ale LIS a PIS výpočty sa neskončia a teda $\phi(1, 0) \to^*_{P,LIS} \bot$ a $\phi(1, 0) \to^*_{P,PIS} \bot$.

Vzťah medzi f_P a c_P^r

Veta: Pre každý rekurzívny program P a ľubovoľné výpočtové pravidlo r platí $c_P^r \sqsubseteq f_P$.

Dôkaz: Uvažujme výpočtovú cestu $s_0[\phi], s_1[\phi], \cdots, s_n[\phi], \cdots$ v $\mathcal{D}_t$, zodpovedajúcu výpočtu pravidlom r a ľubovoľnému vstupu $\overline{d}$ a kanonickú cestu $t_0[\phi], t_1[\phi], \cdots, t_n[\phi], \cdots$. Zrejme pre všetky i platí $s_i \rightarrow_P^* t_i$. Potom podľa lemy o interpretácii termov výpočtového diagramu, usporiadaných reláciou $\trianglelefteq$, platí $s_i^{\mathcal{I}}[\Omega](\overline{d}) \sqsubseteq t_i^{\mathcal{I}}[\Omega](\overline{d})$. Takže $\forall i: \ s_i^{\mathcal{I}}[\Omega](\overline{d}) \sqsubseteq t_i^{\mathcal{I}}[\Omega](\overline{d}) \sqsubseteq \sqcup_0^\infty t_i^{\mathcal{I}}[\Omega](\overline{d}) =_{df} f_P(\overline{d})$. Odtiaľ $\sqcup_0^\infty s_i^{\mathcal{I}}[\Omega](\overline{d}) =_{df} c_P^r(\overline{d}) \sqsubseteq f_P(\overline{d})$ pre ľubovoľný vstup $\overline{d}$.

Dôsledky:

- ak jedna z výpočítaných funkcií je pevným bodom P, potom je to najmenší pevný bod,
- rekurzívny program nemôže mať viac ako jeden “vypočitateľný" pevný bod,
- ak má rekurzívny program pevný bod a dva rôzne výpočty pre daný vstup sa skončia, musia sa skončiť rovnakým výsledkom,
- ak $f_P(\overline{d}) \equiv \perp$ pre $\overline{d} \in M \subseteq D^n$, potom žiadny výpočet, začínajúci vstupom $\overline{d} \in M$ sa nemôže skončiť,
- ak $f_P \equiv \Omega$, potom žiadny výpočet programu P sa nemôže skončiť,
- ak $f_P \not\equiv \Omega$, potom aspoň jedna z funkcií, použitá v P, nie je striktná.

Kritéria korektnosti pravidiel

<u>**Sémantické kritérium**</u> – využíva vlastnosti tried interpetácií.

Označenie – výskyty ϕ v terme s vybrané pravidlom r označíme ϕ_1, ostatné ϕ_2, t.j. $s[\phi] =_{nt} s[\phi/\phi_1, \phi/\phi_2]$.

Bezpečná substitúcia – substitúcia za výskyty ϕ_1 je bezpečná pri interpretácii $\mathcal{I}$, ak pre ľubovoľný interpretovaný term $s^{\mathcal{I}}$

$$s^{\mathcal{I}}[\Omega/\phi_1, \Omega/\phi_2](\overline{d}) \equiv s^{\mathcal{I}}[\Omega/\phi_1, f_P/\phi_2](\overline{d}) \equiv \perp .$$

Bezpečné pravidlo - používa iba bezpečné substitúcie.

Intuícia – niektoré výskyty nestačí nahradiť ani “najväčšou" dostupnou informáciou, pokiaľ nezískame lepšiu aproximáciu o ostatných výskytoch. Bezpečné pravidlo forsíruje vyhodnotenie argumentov, ktoré sú pre výpočet podstatné.

<u>**Syntaktické kritérium**</u> – platí nezávisle od interpretácie (univerzálne pravidlá).

Syntaktická dominancia – pravidlo r syntakticky dominuje nad pravidlom POS, ak vo výpočtovom diagrame $\mathcal{D}_t$ platí

$$\forall s, u : \ s \to_{P,POS} u \quad \exists v : \ s \to^*_{P,r} v \ \wedge \ u \to^*_P v.$$

Príklad – pravidlo FS je bezpečné a syntakticky dominuje nad POS.

Bezpečné výpočtové pravidlá

Lema: V jazyku $\mathcal{L}_1$ je pravidlo POS bezpečné.

Dôkaz: indukciou vzhľadom na konštrukciu <u>zjednodušeného</u> termu s. Keďže pre $s \in F^0$ lema evidentne platí, uvažujeme dva prípady:

1. $s = \underline{\phi}(s_1[\phi], \cdots, s_n[\phi])$, potom pri každej interpretácii $\mathcal{I}$

$$\Omega(s_1^{\mathcal{I}}[\Omega], \cdots, s_n^{\mathcal{I}}[\Omega])(\overline{d}) \equiv \Omega(s_1^{\mathcal{I}}[f_P], \cdots, s_n^{\mathcal{I}}[f_P])(\overline{d}) \equiv \perp .$$

2. $s = f(a_1, \cdots, a_k, \underline{\phi}(\overline{s_1[\phi]}), \cdots, \underline{\phi}(\overline{s_m[\phi]}))$, kde $f \in [D^n \mapsto D]$. Keďže s je zjednodušený term, musí platiť $f(a_1, \cdots, a_k, \perp, \cdots, \perp) = \perp$. Odtiaľ

$$f(\overline{a}, \Omega(\overline{s_1^{\mathcal{I}}[\Omega]}), \cdots, \Omega(\overline{s_m^{\mathcal{I}}[\Omega]}))(\overline{d}) \equiv f(\overline{a}, \Omega(\overline{s_1^{\mathcal{I}}[f_P]}), \cdots, \Omega(\overline{s_m^{\mathcal{I}}[f_P]}))(\overline{d}) \equiv \perp$$

Lema: Pravidlo FAS je bezpečné v $\mathcal{L}_1$, ak f_P nie je konštantná funkcia.

Dôkaz: pre prípad $\phi(\underline{\phi}(\overline{s_1}), \cdots, \underline{\phi}(\overline{s_n}))$, kde $\overline{s_i}$ neobsahujú ϕ. Aby

$$f_P(\Omega(\overline{s_1^{\mathcal{I}}}), \cdots, \Omega(\overline{s_n^{\mathcal{I}}}))(\overline{d}) \equiv \perp \equiv \Omega(\Omega(\overline{s_1^{\mathcal{I}}}), \cdots, \Omega(\overline{s_n^{\mathcal{I}}}))(\overline{d}),$$

musí platiť $f_P(\perp, \cdots, \perp) \equiv \perp$, t.j. f_P nesmie byť konštantou.

Lema: V jazyku $\mathcal{L}_2$ je bezpečné aj pravidlá LOS.

Dôkaz: zaujímavý je prípad termu **if** $b[\phi_{LOS}]$ **then** $s_1[\phi]$ **else** $s_2[\phi]$ **fi**. Pravidlo LOS sa najprv pokúša substituovať v podmienke a zo striktnosti b a sekvenčnej interpretácie if $\perp$ then x else y fi $\equiv \perp$ vyplýva, že pravidlo je bezpečné.

Korektnosť bezpečných pravidiel

Veta: Každé bezpečné výpočtové pravidlo je korektné.

Dôkaz: sporom, t.j. predpokladáme, že pravidlo r je bezpečné ale napriek tomu platí $c_P^r \not\equiv f_P$. Potom $\exists \overline{d} \in D^n : c_P^r(\overline{d}) \equiv \perp$ ale $f_P(\overline{d}) \not\equiv \perp$ a teda podľa vety o pevnom bode $\exists m : (t^m)^{\mathcal{I}}[\Omega] \not\equiv \perp$.

Nech $s_0[\phi], \cdots, s_n[\phi], \cdots$ je cesta v diagrame $\mathcal{D}_t$, zodpovedajúca pravidlu r a vstupu $\overline{d}$. Keďže $c_P^r(\overline{d}) \equiv \perp$, máme dve možnosti:

1. cesta je konečná a $s_n^{\mathcal{I}}[\Omega](\overline{d}) \equiv s_n^{\mathcal{I}}[f_P](\overline{d}) \equiv \perp$. Na druhej strane platí $s_0^{\mathcal{I}}[f_P](\overline{d}) \equiv f_P(\overline{d}) \not\equiv \perp$, čo je v spore s predpokladom, pretože $s_0^{\mathcal{I}}[f_P](\overline{d}) \sqsubseteq s_n^{\mathcal{I}}[f_P](\overline{d})$.

2. cesta je nekonečná. Potom každý term $s_i[\phi]$ obsahuje konečný počet výskytov ϕ v hĺbke $\leq m$ a teda $\exists N$ také, že $s_{N+1}[\phi]$ vzniká z $s_N[\phi]$ len substitúciou za výskyty v hĺbke $> m$ (označme tieto výskyty ϕ_1).

   Potom všetky výskyty Ω v $s_N[\Omega/\phi_1, t^m[\Omega]/\phi_2]$ sú v hĺbke $> m$. Odtiaľ z monotónnosti príslušných termov vyplýva

   $$(t^m)^{\mathcal{I}}[\Omega] \sqsubseteq s_N^{\mathcal{I}}[\Omega/\phi_1, (t^m)^{\mathcal{I}}[\Omega]/\phi_2] \sqsubseteq s_N^{\mathcal{I}}[\Omega/\phi_1, f_P/\phi_2].$$

   Keďže $(t^m)^{\mathcal{I}}[\Omega](\overline{d}) \not\equiv \perp$, musí byť aj $s_N^{\mathcal{I}}[\Omega/\phi_1, f_P/\phi_2] \not\equiv \perp$, čo odporuje predpokladu, že r je bezpečné pravidlo.

Univerzálne korektné pravidlo

Lema: Nech $s, u, v \in \mathcal{D}_t$ také, že $s \to_{P,POS} u$ a $s \to_P^* v$. Potom existuje w s vlastnosťou $v \to_{P,POS} w$ a $u \to_P^* w$.

Dôkaz: tvrdenie vyplýva priamo z vlastnosti

$$\forall s, u, v:\ s \to_{P,POS} u\ \wedge s \to_P v \quad \exists w:\ v \to_{P,POS} w\ \wedge u \to_P w.$$

Túto "jednokrokovú" verziu lemy dokážeme indukciou vzhľadom na štruktúru termu s.

Veta: Ak v $\mathcal{D}_t$ programu P pravidlo r syntakticky dominuje pravidlu POS, potom je pre daný program univerzálne korektné.

Dôkaz: uvažujme dve cesty v diagrame $\mathcal{D}_t$ s rovnakým vstupom $s_0 = t_0$:

$$v_0 \to_{P,r}^* v_1 \to_{P,r}^* \cdots \to_{P,r}^* v_n \to_{P,r}^* \cdots$$

$$s_0 \to_{P,POS} s_1 \to_{P,POS} \cdots \to_{P,POS} s_n \to_{P,POS} \cdots$$

Z predpokladu syntaktickej dominantnosti vyplýva:

$$\forall v_i, w_{i+1}:\ v_i \to_{P,POS} w_{i+1} \quad \exists v_{i+1}:\ v_i \to_{P,r}^* v_{i+1}\ \wedge w_{i+1} \to_P^* v_{i+1}.$$

Vlastnosť ciest v $\mathcal{D}_t$, dokázaná predchádzajúcou lemou:

$$\forall s_i, s_{i+1}, v_i:\ s_i \to_{P,POS} s_{i+1}\ \wedge s_i \to_P^* v_i$$
$$\exists w_{i+1}:\ v_i \to_{P,POS} w_{i+1}\ \wedge s_{i+1} \to_P^* w_{i+1}.$$

Odtiaľ indukciou vzhľadom na cesty $\{s_i\}$ a $\{v_i\}$ platí $\forall i:\ s_i \to_P^* v_i$.

Podľa lemy o vlastnostiach interpretovaných odvodení $f_P \equiv \sqcup_0^\infty\{s_i^{\mathcal{I}}[\Omega]\} \sqsubseteq \sqcup_0^\infty\{v_i^{\mathcal{I}}[\Omega]\}$, takže $c_P^r \equiv f_P$.