Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzity Komenského
v Bratislave

Diplomová práca

2002

Martin Baláž

**FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO
V BRATISLAVE**

Inštitút informatiky

Dynamické Kripkeho štruktúry pre dobre založenú sémantiku

Diplomant: **Martin Baláž**
Školiteľ: **PhDr. Ján Šefránek, CSc.**

Apríl, 2002

Čestne prehlasujem, že som diplomovú prácu robil
samostatne a uviedol som všetku použitú literatúru.

Chcel by som sa poďakovať mojim rodičom
za ich veľkú podporu počas mojich štúdií
a PhDr. Jánovi Šefránkovi, CSc.
za odborné vedenie a venovaný čas.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Základnou problematikou logického programovania je definícia sémantiky negácie. Bolo navrhnutých viacero prístupov, najviac však bola akceptovaná sémantika stabilných modelov a sémantika dobre založených modelov. Dobre založaný model je pre normálne logické programy vždy jednoznačne definovaný. Pre stabilné modely to neplatí. Pre zovšeobecnené logické programy však nemusí existovať ani dobre založený model. Hlavný rozdiel medzi týmito dvoma prístupmi je vo vysporiadaní sa s rekurziou cez negáciu ako default.

Naviac bola zavedená ďalšia forma negácie. Poskytuje mechanizmus na explicitné vyjadrenie nepravdivosti literálu, čo doteraz nebolo možné. Princíp koherencie spája význam novozavedenej explicitnej $\neg$-negácie s pôvodnou defaultovou $\sim$-negáciou: ak platí L (reps. $\neg L$), tak platí aj $\sim \neg L$ (resp. $\sim L$). Koherencia je základným princípom sámantiky dobre založených modelov pre rozšírené logické programy.

Hlavná myšlienka dynamického logického programovania je nasledovná: Nech je daný program P, ktorý predstavuje súčastnú bázu našich poznatkov. Tento program je modifikovaný pomocou iného programu U, ktorý predstavuje nové poznatky. Výsledkom tejto modifikácie je nový program $P \oplus U$. Pri špecifikovaní sémantiky programu $P \oplus U$ sa využíva predpoklad, že poznatky v programe U sú novšie ako v programe P.

V [1] autor navrhol čisto sémantickú štruktúru, ktorá by umožnila špecifikovať sémantiku stabilných modelov zovšeobecneného logického programu bez syntaktických transformácií (bez používania nových výrokových symbolov, bez zavádzania nových kláuz). Zadefinoval Kripkeho štruktúru asociovanú so zovšeobecneným logickým programom a operáciu na Kripkeho štruktúrach, ktorá slúži ako sémantická špecifikácia modifikovaného programu. Hlavnou výhodou takejto modifikácie je, že je schopná využiť závislosti medzi literálmi zachytené v Kripkeho štruktúre.

V tejto práci sa pokúsime špecifikovať sémantiku dobre založených modelov zovšeobecnených a rozšírených logických programov pomocou Kripkeho štruktúr. Rozšírime tiež opráciu na Kripkeho štruktúrach, pomocou ktorej budeme špecifikovať sémantiku modifikovaného programu.

V druhej kapitole zadefinujeme základné pojmy logických programov. Potom sa oboznámime s normálnymi a zovšeobecnenými logickými programami a so sémantikou dobre zložených modelov (resp. čiastočne stabilných modelov). V ďalšej kapitole sa pokúsime rozšíriť túto sémantiku na rozšírené logické programy. Vo štvrtej kapitole sa zoznámime s Kripkeho štruktúrou asociovanou s logickým a rozšíreným logickým programom. Nakoniec zadefinujeme operáciu spájania Kripkeho štruktúr.

Kapitola 2

Logický program

V tejto časti zavedieme základné definície syntaxe a sémantiky logického programu. Potom sa zameriame na normálne a zovšeobecnené logické programy a zadefinujeme ich sémantiku pomocou pevného bodu oprátora.

2.1 Syntax

Definícia 2.1.1 Abeceda $\mathcal{A}$ *je množina, ktorá obsahuje*

1. *konečne alebo spočítateľne veľa symbolov premenných*
2. *konečne alebo spočítateľne veľa predikátových symbolov*
3. *konečne alebo spočítateľne veľa funkčných symbolov*
4. *symboly logických spojok* $\{\sim, \wedge, \vee, \leftarrow\}$
5. *symboly kvantifikátorov* $\{\forall, \exists\}$
6. *interpunkčné znamienka* { *"(", ",", ")"*}

Definícia 2.1.2 Jazyk $\mathcal{L}$ nad abecedou $\mathcal{A}$ *je usporiadaná trojica* $(\mathcal{P}, \mathcal{F}$, *arity*)*, kde*

1. $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$ *je množina predikátových symbolov*
2. $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ *je množina funkčných symbolov*
3. $arity : \mathcal{P} \cup \mathcal{F} \to \mathcal{N}$ *je arita predikátových a funkčných symbolov*

Množiny $\mathcal{P}$*,* $\mathcal{F}$ *sú spolu s množinami symbolov premenných, logických spojok, kvantifikátorov a interpunkčných znamienok navzájom po dvoch disjunktné.*

Zadefinovaný jazyk $\mathcal{L}$ nad abecedou $\mathcal{A}$ je prvorádový jazyk bez rovnosti. Predikátové symboly sú mená vlastností alebo vzťahov, funkčné symboly sú mená funkcií. Funkcia *arity* nám určuje počet argumentov v predikátoch a funkciách. Výrokové premenné môžeme považovať za predikáty arity 0, konštanty za funckie arity 0. Pokiaľ neuvedieme inak, budeme ďalej predpokladať zadefinovaný prvorádový jazyk.

Definícia 2.1.3 Term *je:*

1. *premenná*
2. *ak* $t_1, \ldots, t_n, n \in \mathcal{N}$ *sú termy a* f, $arity(f) = n$ *je funkčný symbol arity* n*, potom* $f(t_1, \ldots, t_n)$ *je term*
3. *každý term vznikne konečným použitím 1 a 2*

Definícia 2.1.4 *Ak* $t_1, \ldots, t_n, n \in \mathcal{N}$ *sú termy a* p, $arity(p) = n$ *je predikátový symbol arity* n*, potom* $p(t_1, \ldots, t_n)$ *je* atóm*.*

Definícia 2.1.5 Literál L *je atóm* A *alebo jeho negácia* $\sim A$*.*

Definícia 2.1.6 Formula *je:*

1. *atóm*
2. *ak* F, G *sú formuly, potom* $\sim F$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(G \leftarrow F)$ *sú formuly.*
3. *ak* F *je formula,* X *je premenná, potom* $(\forall X)F$, $(\exists X)F$ *sú formuly.*
4. *každá formula vznikne konečným použitím 1, 2 a 3*

Definícia 2.1.7 *Term, atóm, literál, formulu nazývame* základnými*, ak neobsahujú premennú.*

Definícia 2.1.8 *Množinu základných termov nazývame* Herbrandovo univerzum $\mathcal{U}$*. Množinu základných atómov nazývame* Herbrandova báza $\mathcal{H}$*.*

Definícia 2.1.9 Logický program P *je konečná množina formúl v jazyku* $\mathcal{L}$*.*

Pokiaľ neuvedieme inak, budeme predpokladať, že abeceda $\mathcal{A}$ programu P pozostáva iba z predikátových a funkčných symbolov vyskytujúcich sa v programe P. Preto môžeme považovať abecedu $\mathcal{A} = \mathcal{A}_P$ za presne určenú programom P a hovoriť o prvorádovom jazyku $\mathcal{L} = \mathcal{L}_P$, Herbrandovom univerzu $\mathcal{U} = \mathcal{U}_P$ a Herbrandovej báze $\mathcal{H} = \mathcal{H}_P$.

2.2 Sémantika

Definícia 2.2.1 *Trojicu* (T, U, F) *nazývame* konzistentnou*, ak sú množiny* T, U, F *po dvoch disjunktné.*

Definícia 2.2.2 Trojhodnotová Herbrandova interpretácia I jazyka $\mathcal{L}$ *je konzistentná trojica* (T, U, F)*, kde* T, U *a* F *sú podmnožiny Herbrandovej bázy* H*.*

Interpretácia I nám určuje pravdivosť atómov. Množina T obsahuje všetky atómy, ktoré sú pravdivé, množina F obsahuje všetky nepravdivé atómy. Pravdivostná hodnota atómov v množine U je neznáma.

V tejto práci budeme predpokladať iba trojhodnotové Herbrandove interpretácie, hoci výsledky môžu byť rozšírené aj na trojhodnotové interpretácie, ktoré nie sú Herbrandove.

Definícia 2.2.3 *Nech* $I = (T, U, F)$ *je interpretácia,* $\mathcal{H}$ *je Herbrandova báza. Hovoríme, že* I *je*

- čiastočná*, ak* $T \cup U \cup F \subset \mathcal{H}$*.*
- totálna*, ak* $T \cup U \cup F = \mathcal{H}$*.*

Definícia 2.2.4 *Nech* $I = (T_I, U_I, F_I)$ *a* $J = (T_J, U_J, F_J)$ *sú interpretácie. Hovoríme, že* J *je zúplnenie* I*, ak*

$$I \subseteq J \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad T_I \subseteq T_J \wedge U_I \subseteq U_J \wedge F_I \subseteq F_J$$

Poznámka 2.2.1 *Na interpretáciu* $I = (T, U, F)$ *sa môžeme pozerať aj ako na (čiastočnú) funkciu* $I : \mathcal{H} \to \mathcal{V}$*, kde* $\mathcal{H}$ *je Herbrandova báza,* $\mathcal{V} = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ *je množina pravdivostných hodnôt a platí:*

1. $I(A) = 1$*, ak* $A \in T$
2. $I(A) = \frac{1}{2}$*, ak* $A \in U$
3. $I(A) = 0$*, ak* $A \in F$
4. *inak je hodnota* $I(A)$ *nedefinovaná*

Rekurzívne rozšírime funkciu interpretácie $I : \mathcal{H} \to \mathcal{V}$ na ohodnocovaciu funkciu $val_I : \mathcal{C} \to \mathcal{V}$ všetkých formúl jazyka.

Definícia 2.2.5 Dosadenie termu t za premennú X vo formule F *je nasledovná operácia:*

1. *Ak* F *je atóm, tak* $F\{X \mid t\}$ *je výsledkom dosadenia* t *za každý výskyt premennej* X

2. *Ak F a G sú formuly, tak*

$$(\sim F)\{X \mid t\} = \sim F\{X \mid t\}$$
$$(F \wedge G)\{X \mid t\} = F\{X \mid t\} \wedge G\{X \mid t\}$$
$$(F \vee G)\{X \mid t\} = F\{X \mid t\} \vee G\{X \mid t\}$$
$$(G \leftarrow F)\{X \mid t\} = G\{X \mid t\} \leftarrow F\{X \mid t\}$$

3. *Ak F je formula, $Y \neq X$ je premenná, tak*

$$((\forall X)F)\{X \mid t\} = (\forall X)F$$
$$((\exists X)F)\{X \mid t\} = (\exists X)F$$
$$((\forall Y)F)\{X \mid t\} = (\forall Y)F\{X \mid t\}$$
$$((\exists Y)F)\{X \mid t\} = (\exists Y)F\{X \mid t\}$$

Definícia 2.2.6 *Nech I je interpretácia, $\mathcal{U}$ je Hrbrandovo univerzum. Potom* ohodnocovacou funkcou vzhľadom na *I nazveme (čiastočnú) funkciu $val_I : \mathcal{C} \to \mathcal{V}$ takú, že $\mathcal{C}$ je množina všetkých formúl, $\mathcal{V} = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ je množina pravdivostných hodnôt a platí:*

1. *ak A je základný atóm, tak*

$$val_I(A) = I(A)$$

2. *ak F je formula obsahujúca voľný výskyt premennej X, tak*

$$val_I(F) = val_I((\forall X)F)$$

3. *ak F je uzavretá formula, tak*

$$val_I(\sim F) = 1 - val_I(F)$$

4. *ak F a G sú uzavreté formuly, tak*

$$val_I(F \wedge G) = \min(val_I(F), val_I(G))$$
$$val_I(F \vee G) = \max(val_I(F), val_I(G))$$
$$val_I(G \leftarrow F) = \leq (val_I(F), val_I(G))$$

5. *ak $(\forall X)F, (\exists X)F$ sú uzavreté formuly, tak*

$$val_I((\forall X)F) = \inf(\{val_I(F\{X \mid t\}) \mid t \in \mathcal{U}\})$$
$$val_I((\exists X)F) = \sup(\{val_I(F\{X \mid t\}) \mid t \in \mathcal{U}\})$$

Funkcie rozdielu, minimálneho a maximálneho prvku, nerovnosti, najmenšieho a najväčšieho prvku sú prirodzene rozšírené aj pre nedefinované operandy.

Definícia 2.2.7 *Interpretáciu I nazývame* modelom programu P, *ak*

$$(\forall F)(F \in P \Rightarrow val_I(F) = 1)$$

Existujú dve základné usporiadania na totálnych interpretáciách. Pravdivostné usporiadanie minimalizuje stupeň pravdivosti atómov minimalizovaním množiny T pravdivých atómov a maximalizovaním množiny F nepravdivých atómov. Informačné usporiadanie minimalizuje stupeň informácie atómov spoločným minimalizovaním množín T a F atómov, ktoré sú pravdivé alebo nepravdivé a teda maximalizovaním množiny U atómov s neznámou hodnotou.

Definícia 2.2.8 *Nech $\mathcal{I}$ je množina totálnych interpretácií, $I = (T_I, U_I, F_I)$ a $J = (T_J, U_J, F_J)$ sú interpretácie z $\mathcal{I}$.*
Hovoríme, že I je pravdivostne menšie alebo rovné ako J, *ak*

$$I \preceq J \quad \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad T_I \subseteq T_J \wedge F_I \supseteq F_J$$

Hovoríme, že I je pravdivostne minimálna (t-minimálna) v $\mathcal{I}$, *ak*

$$(\forall J)(J \in \mathcal{I} \wedge J \neq I \Rightarrow J \not\preceq I)$$

Hovoríme, že I je pravdivostne najmenšia (t-najmenšia) v $\mathcal{I}$, *ak*

$$(\forall J)(J \in \mathcal{I} \Rightarrow I \preceq J)$$

Definícia 2.2.9 *Nech $\mathcal{I}$ je množina totálnych interpretácií, $I = (T_I, U_I, F_I)$ a $J = (T_J, U_J, F_J)$ sú interpretácie z $\mathcal{I}$.*
Hovoríme, že I je informačne menšie alebo rovné ako J, *ak*

$$I \leq J \quad \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad T_I \subseteq T_J \wedge F_I \subseteq F_J$$

Hovoríme, že I je informačne minimálna (i-minimálna) v $\mathcal{I}$, *ak*

$$(\forall J)(J \in \mathcal{I} \wedge J \neq I \Rightarrow J \not\leq I)$$

Hovoríme, že I je informačne najmenšia (i-najmenšia) v $\mathcal{I}$, *ak*

$$(\forall J)(J \in \mathcal{I} \Rightarrow I \leq J)$$

2.3 Nezáporný logický program

Skôr, ako pristúpime k definícii normálneho logického programu, zadefinujeme nezáporný logický program, ktorý nám bude slúžiť na sémantickú špecifikáciu normálneho logického programu. Rozšírime abecedu jazyka o nové predikátové symboly t, u a f. Symbol t budeme vždy interpretovať ako pravdivý, symbol f ako nepravdivý. Hodnota symbolu u bude neznáma.

Definícia 2.3.1 *Rozšírime abecedu $\mathcal{A}$ na abecedu $\mathcal{A}^+$ o množinu nových predikátových symbolov $\{t, u, f\}$.*
Pre jazyk $\mathcal{L}^+ = (\mathcal{P}, \mathcal{F}, arity)$ nad abecedou $\mathcal{A}^+$ naviac platí:

1. $\{t, u, f\} \subseteq \mathcal{P} \subset \mathcal{A}^+$
2. $arity(t) = arity(u) = arity(f) = 0$

Definícia 2.3.2 *Interpretácia I jazyka $\mathcal{L}^+$ je konzistentná trojica množín (T, U, F), kde T, U a F sú podmnožiny Herbrandovej bázy $\mathcal{H}^+$, $t \in T$, $u \in U$, $f \in F$.*

Definícia 2.3.3 Nezáporný logický program P *obsahuje formuly tvaru*

$$A \leftarrow A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n, n \in \mathcal{N}$$

kde $A \notin \{t, u, f\}, A_i, 1 \leq i \leq n$ sú atómy.

Poznámka 2.3.1 $A \leftarrow A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ *nazývame* pravidlom, *značíme c, A nazývame* hlavou pravidla *c, značíme $head(c)$, $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ nazývame* telom pravidla *c, značíme $body(c)$.*

Nepotrebujeme nutne predpokladať, aby sa v hlavách pravidiel nemohli vyskytovať predikátové konštanty t, u, f, avšak pre väčšiu jednoduchosť to budeme požadovať.

Teraz zavedieme operátor Ψ na množine trojhodnotových interpetácií. Potom ukážeme, že t-najmenší model nezáporného logického programu vždy existuje a dá sa získať ako najmenší pevný bod operátora Ψ.

Definícia 2.3.4 *Nech P je nezáporný logický program, $\mathcal{I}$ je množina všetkých totálnych interpretácií, $I \in \mathcal{I}$ je interpretácia, $A \notin \{t, u, f\}$ je atóm. Potom $\Psi : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$ je operátor definovaný nasledovne:*

1. $\Psi(I)(A) = 1 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\exists c \in P)(head(c) = A \wedge val_I(body(c)) = 1)$
2. $\Psi(I)(A) = \frac{1}{2} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall c \in P)(head(c) = A \Rightarrow val_I(body(c)) \neq 1) \wedge$
   $\wedge\ (\exists c \in P)(head(c) = A \wedge val_I(body(c)) \neq 0)$
3. $\Psi(I)(A) = 0 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall c \in P)(head(c) = A \Rightarrow val_I(body(c)) = 0)$

Definícia 2.3.5 *Nech P je nezáporný logický program, I je totálna interpretácia.* Uzáver $\Psi^* = \Psi^{*\uparrow\omega}$ operátora Ψ *je definovaný nasledovne:*

1. $\Psi^{*\uparrow 0}(I) = I$
2. $\Psi^{*\uparrow n+1}(I) = \Psi(\Psi^{*\uparrow n}(I))$
3. $\Psi^{*\uparrow\omega}(I) = \sup(\{\Psi^{*\uparrow n}(I) \mid n \in \mathcal{N}\})$

Veta 2.3.1 *Nech P je nezáporný logický program. Potom existuje totálna interpretácia $I = \Psi^*((\emptyset, \emptyset, \mathcal{H}^+))$, ktorá je t-najmenším modelom P.*

Dôkaz Dôkaz je veľmi podobný dôkazu uvedenom v [6], preto ho tu nebudeme uvádzať. $\square$

2.4 Normálny logický program

Definícia 2.4.1 Normálny logický program P *obsahuje formuly tvaru*

$$A \leftarrow L_1 \wedge L_2 \wedge \ldots \wedge L_n, n \in \mathcal{N}$$

kde A je atóm, $L_i, 1 \leq i \leq n$ sú literály.

Zavedieme transformáciu normálneho logického programu na nezáporný logický program, pomocou ktorého budeme špecifikovať jeho sémantiku.

Definícia 2.4.2 *Nech P je normálny logický program, I je totálna interpretácia.* GL-transformácia P modulo I *je nezáporný logický program $\frac{P}{I}$ získaný z P nasledujúcim spôsobom: Všetky negatívne literály $\sim A$ v telách pravidiel zameníme za predikátovú konštantu t, ak $val_I(\sim A) = 1$, za u, ak $val_I(\sim A) = \frac{1}{2}$, za f, ak $val_I(\sim A) = 0$.*

Definícia 2.4.3 *Nech P je normálny logický program, $\mathcal{I}$ je množina všetkých totálnych interpretácií, $I \in \mathcal{I}$ je interpretácia. Operátor $\Gamma : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$ je definovaný nasledovne:*

$\Gamma(I)$ je t-najmenší model programu P modulo I.

Podľa vety 2.3.1 vždy existuje t-najmenší model nezáporného logického programu, preto je operátor Γ definovaný pre každú interpretáciu.

Už máme všetky nástroje, aby sme mohli definovať sémantiku normálneho logického programu pomocou pevného bodu operátora Γ. Ohodnotíme všetky defaultové predpoklady, t.j. zameníme v telách pravidiel literály $\sim A$ za predikátové konštanty t, u, f podľa ohodnotenia A. Ak minimálny model modifikovaného programu je ten istý, ktorý sme predpokladali, budeme ho považovať za sémantickú špecifikáciu programu.

Definícia 2.4.4 *Nech P je normálny logický program. Totálnu interpretáciu I nazývame čiastočným stabilným modelom programu P, ak $\Gamma(I) = I$. Čiastočne stabolný model I nazývame dobre založeným modelom programu P, ak je i-najmenší v množine stabilných modelov.*

Veta 2.4.1 *Nech P je normálny logický program, I je čiastočný stabilný model programu P. Potom I je t-minimály model programu P.*

Veta 2.4.2 *Nech P je normálny logický program. Potom existuje dobre založený model P.*

Dôkazy uvedených viet sa dajú nájsť v [3].

2.5 Zovšeobecnený logický program

Definícia 2.5.1 Zovšeobecnený logický program P *obsahuje formuly tvaru*

$$L \leftarrow L_1 \wedge L_2 \wedge \ldots \wedge L_n, n \in \mathcal{N}$$

kde $L, L_i, 1 \leq i \leq n$ *sú literály.*

Na rozdiel od normálneho logického programu zovšeobecnený logický program povoluje negatívne literály v hlavách pravidiel. Skúsme sa najprv pozrieť na literály A a $\sim A$ v hlavách pravidiel ako na nezávislé atómy A a $\overline{A}$ a skúmajme, v akom vťahu sa môžu vyskytovať v čiastočne stabilných modeloch.

Definícia 2.5.2 *Nech P je zovšeobecnený logický program.* Modifikovaný program $\overline{P}$ programu P *je definovaný nasledovne:*

$$A \leftarrow L_1 \wedge L_2 \wedge \ldots \wedge L_n \in \overline{P} \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad A \leftarrow L_1 \wedge L_2 \wedge \ldots \wedge L_n \in P$$

$$\overline{A} \leftarrow L_1 \wedge L_2 \wedge \ldots \wedge L_n \in \overline{P} \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \neg A \leftarrow L_1 \wedge L_2 \wedge \ldots \wedge L_n \in P$$

kde $A, \overline{A}$ *sú atómy,* $L_i, 1 \leq i \leq n$ *sú literály.*

Modifikovaný program $\overline{P}$ je normálny logický program. Jazyk $\mathcal{L}_{\overline{P}}$ obsahuje navyše pre každý predikátový symbol p nový predikátový symbol $\overline{p}$.

Čiastočne stabilný model $\overline{I}$ modifikovaného programu $\overline{P}$ nám určuje, aké minimálne ohodnotenie musí mať atóm $\overline{A}$, aby bol modelom programu $\overline{P}$. V kontexte pôvodného programu P toto ohraničenie spôsobí nekonzistenciu s ohodnotením atómu A práve vtedy, keď interpretácia $\overline{I}$ nie je koherentná.

Definícia 2.5.3 *Nech P je zovšeobecnený logický program, $\mathcal{H}$ je Herbrandova báza P, $\overline{I} = (T_{\overline{I}}, U_{\overline{I}}, F_{\overline{I}})$ je totálna interpretácia modifikovaného programu $\overline{P}$.*
Hovoríme, že $\overline{I}$ je koherentná*, ak*

1. $(\forall A \in \mathcal{H})(A \in T_{\overline{I}} \Rightarrow \overline{A} \in F_{\overline{I}})$
2. $(\forall A \in \mathcal{H})(\overline{A} \in T_{\overline{I}} \Rightarrow A \in F_{\overline{I}})$

Pre každý atóm A (resp. atóm $\overline{A}$) a A-pravidlo c (resp. $\overline{A}$-pravidlo c) v programe $\overline{P}$ musí platiť: $val_{\overline{I}}(A) >= val_{\overline{I}}(body(c))$ (resp. $val_{\overline{I}}(\overline{A}) >= val_{\overline{I}}(body(c))$). Pre pôvodný program P nám v interpretácii $\overline{I}$ hodnota A určuje dolné ohraničenie a hodnota $\overline{A}$ horné ohraničenie. Vlastnosť koherencie nám zaručí, že tieto ohraničenia nebudú mať prázdny prienik. Keďže snahou čiastočne stabilných modelov je t-minimalizovať hodnotu atómov, pre interpretáciu I bude v $\overline{I}$ smerodajná hodnota atómu A. Preto I získame z $\overline{I}$ vypustením atómov tvaru $\overline{A}$.

Definícia 2.5.4 *Nech P je zovšeobecnený logický program, $\mathcal{H}$ je Herbrandova báza P, $I = (T_I, U_I, F_I)$ je interpretácia P, $\overline{I} = (T_{\overline{I}}, U_{\overline{I}}, F_{\overline{I}})$ je interpretácia modifikovaného programu $\overline{P}$. Hovoríme, že I* je reštrikciou *$\overline{I}$, ak*

1. $(\forall A \in \mathcal{H})(A \in T_I \Leftrightarrow A \in T_{\overline{I}})$
2. $(\forall A \in \mathcal{H})(A \in U_I \Leftrightarrow A \in U_{\overline{I}})$
3. $(\forall A \in \mathcal{H})(A \in F_I \Leftrightarrow A \in F_{\overline{I}})$

Definícia 2.5.5 *Nech P je zovšeobecnený logický program, I je totálna interpretácia P. I nazývame čiastočne stabilným modelom programu P, ak existuje čiastočne stabilný model $\overline{I}$ modifikovaného programu $\overline{P}$ a platí:*

1. *$\overline{I}$ je koherentná interpretácia*
2. *I je reštrikciou $\overline{I}$*

Čiastočne stabolný model I nazývame dobre založeným modelom programu P, ak je i-najmenší v množine stabilných modelov.

Veta 2.5.1 *Nech P je zovšeobecnený logický program, I je čiastočný stabilný model programu P. Potom I je t-minimály model programu P.*

Na základe vety 2.4.2 vždy existuje čiastočne stabilný model $\overline{I}$ modifikovaného programu $\overline{P}$. Nemusí však vždy spĺňať podmienku koherencie, preto existencia čiastočne stabilného (resp. dobre založeného) modelu pre zovšeobecnený logický program nie je zaručená.

Kapitola 3

Rozšírený logický program

Gelfond a Lifschitz v [7] ukázali, že v logickom programovaní je často užitočné používať $\sim$-operátor *negácie ako konečného zlyhania* spolu s iným $\neg$-operátorom *klasickej negácie*. Vytvorili sémantiku pre takéto programy na dvojhodnotových interpretáciách. Teodor Przymusinski v [4] rozvinul túto definíciu na dobre založenú a trojhodnotovú stabilnú sémantiku.

Príklad 3.1 *Nasledujúci program P je príkladom rozšíreného programu:*

$$\begin{array}{rcl} \neg vinn\acute{y} & \leftarrow & obvinen\acute{y} \wedge \neg dok\acute{a}zan\acute{a}\_vina \\ \neg odsuden\acute{y} & \leftarrow & obvinen\acute{y} \wedge \sim dok\acute{a}zan\acute{a}\_vina \\ obvinen\acute{y} & \leftarrow & \end{array}$$

Ak je niekto obvinený, aby sme dokázali jeho nevinu, potrebujeme naisto zistiť, že čin nespáchal (príklad klasickej negácie). Na druhej strane, aby sme považovali niekoho za neodsúdeného, postačí nám, že mu nebola dokázaná vina (príklad negácie ako konečného zlyhania).

3.1 Syntax

Definícia 3.1.1 Abeceda $\mathcal{A}^{\neg}$ *je množina, ktorá obsahuje*

1. *konečne alebo spočítateľne veľa symbolov premenných*
2. *konečne alebo spočítateľne veľa predikátových symbolov*
3. *konečne alebo spočítateľne veľa funkčných symbolov*
4. *symboly logických spojok* $\{\sim, \neg, \wedge, \vee, \leftarrow\}$
5. *symboly kvantifikátorov* $\{\forall, \exists\}$
6. *interpunkčné znamienka* { "(", ",", ")"}

Abeceda $\mathcal{A}^{\neg}$ na rozdiel od abecededy prvorádového jazyka obsahuje navyše symbol klasickej negácie $\neg$. Jazyk a term sú definované obdobne ako pre prvorádový jazyk.

Definícia 3.1.2 Objektívny literál *je atóm A alebo jeho $\neg$-negácia $\neg A$.* Literál *je objektívny literál L alebo jeho $\sim$-negácia $\sim L$.*

Definícia 3.1.3 Formula *je:*

1. *objektívny literál*
2. *ak F, G sú formuly, potom $\sim F$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(G \leftarrow F)$ sú formuly.*
3. *ak F je formula, X je premenná, potom $(\forall X)F$, $(\exists X)F$ sú formuly.*
4. *každá formula vznikne konečným použitím 1, 2 a 3*

Definícia 3.1.4 *Množinu základných atómov nazývame* Herbrandova báza *H. Množinu základných objektívnych literálov nazývame* rozšírená Herbrandova báza $\mathcal{H}^{\neg}$.

Definícia 3.1.5 Rozšírený logický program *P je konečná množina formúl v jazyku $\mathcal{L}^{\neg}$.*

Hlavným rozdielom medzi štandardnými a rozšírenými logickými programami je fakt, že základnou jednotkou formúl môže byť namiesto atómu aj objektívny literál, t.j. klasicky negovaný atóm $\neg A$.

3.2 Sémantika

Definícia 3.2.1 Trojhodnotová Herbrandova interpretácia I jazyka $\mathcal{L}^{\neg}$ *je konzistentná trojica* (T, U, F)*, kde* T*,* U *a* F *sú podmnožiny rozšírenej Herbrandovej bázy* $\mathcal{H}^{\neg}$*.*

Definícia 3.2.2 *Nech* $I = (T, U, F)$ *je interpretácia,* $\mathcal{H}^{\neg}$ *je rozšírená Herbrandova báza. Hovoríme, že* I *je*

- čiastočná*, ak* $T \cup U \cup F \subset \mathcal{H}^{\neg}$*.*
- totálna*, ak* $T \cup U \cup F = \mathcal{H}^{\neg}$*.*

Poznámka 3.2.1 *Na interpretáciu* $I = (T, U, F)$ *sa môžeme pozerať aj ako na (čiastočnú) funkciu* $I : \mathcal{H}^{\neg} \rightarrow \mathcal{V}$*, kde* $\mathcal{H}^{\neg}$ *je rozšírená Herbrandova báza,* $\mathcal{V} = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ *je množina pravdivostných hodnôt a platí:*

1. $I(L) = 1$*, ak* $L \in T$
2. $I(L) = \frac{1}{2}$*, ak* $L \in U$
3. $I(L) = 0$*, ak* $L \in F$
4. *inak je hodnota* $I(L)$ *nedefinovaná*

Definícia 3.2.3 *Nech* I *je interpretácia. Potom* ohodnocovacou funkcou vzhľadom na I *nazveme funkciu* $val_I : C \rightarrow \mathcal{V}$ *takú, že* C *je množina všetkých formúl,* $\mathcal{V} = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ *je množina pravdivostných hodnôt a platí:*

1. *ak* L *je objektívny literál, tak* $val_I(L) = I(L)$

Body 2 až 5 sú ako v definícii 2.2.6.

Nie všetky interpretácie zodpovedajú našej intuícii. Nemôžeme naraz predpokladať, že je niekto vinný a zároveň nevinný ($vinn\acute{y} \wedge \neg vinn\acute{y}$). Na druhej strane môže sa stať, že niekomu zatiaľ nebola dokázaná vina ani nevina ($\sim dok\acute{a}zan\acute{a}\_vina \wedge \sim \neg dok\acute{a}zan\acute{a}\_vina$). Vzájomný vzťah objektívnych literálov A, $\neg A$ vyjadruje princíp koherencie.

Definícia 3.2.4 *Nech* P *je rozšírený logický program,* $\mathcal{H}$ *je Herbrandova báza* P*,* $I = (T, U, F)$ *je totálna interpretácia.*
Hovoríme, že I *je* koherentná*, ak*

$$(\forall A \in \mathcal{H})(A \in T \Rightarrow \neg A \in F)$$

$$(\forall A \in \mathcal{H})(\neg A \in T \Rightarrow A \in F)$$

3.3 Normálny rozšírený logický program

Definícia 3.3.1 Normálny rozšírený logický program P *obsahuje formuly tvaru*

$$L \leftarrow G_1 \wedge G_2 \wedge \ldots \wedge G_n, n \in \mathcal{N}$$

kde L je objektívny literál, $G_i, 1 \leq i \leq n$ sú literály.

Využime podobnú myšlienku ako pri definovaní sémantiky zovšeobecnených programov. Pozrime sa najprv na objektívne literály A a $\neg A$ ako na nezávislé atómy A a A^-. Potom budeme skúmať čiastočne stabilné modely takto modifikovaného programu.

Definícia 3.3.2 *Nech P je normálny rozšírený logický program.* Modifikovaný program P^- *získame z programu P zámenou všetkých objektívnych literálov $\neg A$ za nový atóm A^-.*

Modifikovaný program P^- je normálny logický program. Jazyk $\mathcal{L}^{\neg}_{P^-}$ obsahuje navyše pre každý predikátový symbol p nový predikátový symbol p^-.

Príklad 3.3.1 *Modifikovaný program P^- programu P uvedenom v 3.1 vyzerá nasledovne:*

$$\begin{array}{rcl} \mathit{vinn\acute{y}}^- & \leftarrow & \mathit{obvinen\acute{y}} \wedge \mathit{dok\acute{a}zan\acute{a}\_vina}^- \\ \mathit{ods\acute{u}den\acute{y}}^- & \leftarrow & \mathit{obvinen\acute{y}} \wedge \sim \mathit{dok\acute{a}zan\acute{a}\_vina} \\ \mathit{obvinen\acute{y}} & \leftarrow & \end{array}$$

Ak spätnou substitúciou atómov A^- za pôvodné objektívne literály $\neg A$ v čiastočnom modely modifikovaného programu P^- získame koherentnú interpretáciu, budeme ju považovať za sémantickú špecifikáciu programu P.

Definícia 3.3.3 *Nech P je normálny rozšírený logický program, $\mathcal{H}$ je Herbrandova báza P, $I = (T_I, U_I, F_I)$ je interpretácia P, $I^- = (T_{I^-}, U_{I^-}, F_{I^-})$ je interpretácia modifikovaného programu P^-. Hovoríme, že I* dostaneme spätnou substitúciou z *I^-, ak*

1. $(\forall A \in \mathcal{H})(A \in T_I \Rightarrow A \in T_{I^-})$
2. $(\forall A \in \mathcal{H})(A \in U_I \Rightarrow A \in U_{I^-})$
3. $(\forall A \in \mathcal{H})(A \in F_I \Rightarrow A \in F_{I^-})$
4. $(\forall A \in \mathcal{H})(\neg A \in T_I \Rightarrow A^- \in T_{I^-})$
5. $(\forall A \in \mathcal{H})(\neg A \in U_I \Rightarrow A^- \in U_{I^-})$
6. $(\forall A \in \mathcal{H})(\neg A \in F_I \Rightarrow A^- \in F_{I^-})$

Definícia 3.3.4 *Nech P je normálny rozšírený logický program, I je interpretácia P. I nazývame čiastočne stabilným modelom programu P, ak existuje čiastočne stabilný model I^- modifikovaného programu P^- a platí:*

1. *I^- je koherentný*
2. *I získame spätnou substitúciou z I^-*

Čiastočne stabolný model I nazývame dobre založeným modelom P, ak je i-najmenší v množine stabilných modelov.

Podobne ako pre všeobecný logický program na základe vety 2.4.2 vždy existuje čiastočne stabilný model I^- modifikovaného programu P^-. Nemusí však spĺňať podmienku koherencie, preto existencia čiastočne stabilného (resp. dobre založeného) modelu pre normálny rozšírený logický program nie je zaručená.

3.4 Zovšeobecnený rozšírený logický program

Definícia 3.4.1 Zovšeobecnený rozšírený logický program P *obsahuje formuly tvaru*

$$G \leftarrow G_1 \wedge G_2 \wedge \ldots \wedge G_n, n \in \mathcal{N}$$

kde $G, G_i, 1 \leq i \leq n$ *sú literály.*

Definícia 3.4.2 *Nech P je zovšeobecnený rozšírený logický program, I je totálna interpretácia P. I nazývame čiastočne stabilným modelom programu P, ak existuje čiastočne stabilný model I^- modifikovaného programu P^- a platí:*

1. *I^- je koherentný*
2. *I získame spätnou substitúciou z I^-*

Čiastočne stabolný model I nazývame dobre založeným modelom P, ak je i-najmenší v množine stabilných modelov.

Pretože normálny rozšírený program je špeciálnym prípadom zovšeobecneného rozšíreného programu, existencia čiastočne stabilného (resp. dobre založeného) modelu nie je zaručená.

Kapitola 4

Kripkeho štruktúra

V predchádzajúcich kapitolách sme zaviedli sémantiku logických a rozšírených logických programov pomocou pevného bodu operátora. Ako uvádza Ján Šefránek v [1], tento spôsob nie je celkom vhodný pre použitie v dynamickom logickom programovaní, pretože modifikácia interpretácií nie je schopná zaznamenať závislosti medzi literálmi. Preto zadefinujeme čisto sémantickú štruktúru bez syntaktických transformácií, ktorá bude tieto závislosti zachytávať.

Príklad 4.1 *Nech P je*

$$\begin{array}{rcl} r & \leftarrow & \sim s \\ p & \leftarrow & \sim q \wedge r \\ q & \leftarrow & \sim p \\ q & \leftarrow & p \end{array}$$

Fragment Kripkeho štruktúry je na obrázku 4.1.

Na Kripkeho štruktúru sa môžeme pozerať ako na graf. Vrcholy sú interpretácie. Hrany znázorňujú dostupnosť medzi interpretáciami. Budeme rozlišovať štyri druhy hrán ρ_1, ρ_2, ρ_3 a ρ_4.

ρ_1-hrany nám umožňujú interpretovať atómy priamym odvodením. Ak existuje pravidlo, ktorého telo je pravdivé, tak hlavu budeme tiež považovať za pravdivú. Ak pre nejaký objektívny literál a aj pre jeho $\sim$-komplement existuje pravidlo, ktorého telo je neznáme, potom aj hlavu budeme považovať za neznámu. Pri rozšírených logických programoch ak nejaký objektívny literál je pravdivý, na základe princípu koherencie jeho $\neg$-komplement je nepravdivý.

Pomocou ρ_2-hrán môžeme prijímať defaulty. Ak existuje pravidlo, ktorého jediné neohodnotené predpoklady sú negatívne literály a nemôžeme už pomocou ρ_1-hrán nič odvodiť, potom môžeme pre tieto literály prijať defaultové hodnoty pravda alebo neznáma.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & (\emptyset,\emptyset,\emptyset) \arrow[dll, "2"'] \arrow[drr, "2"] & & & \\
 & (\emptyset,\{p\},\emptyset) \arrow[d, "3"'] & & & & (\emptyset,\emptyset,\{p\}) \arrow[d, "1"] & \\
 & (\emptyset,\{p,q\},\emptyset) \arrow[dl, "2"'] \arrow[dr, "2"] & & & & (\{q\},\emptyset,\{p\}) \arrow[dl, "2"'] \arrow[dr, "2"] & \\
(\emptyset,\{p,q,s\},\emptyset) \arrow[d, "3"'] & & (\emptyset,\{p,q\},\{s\}) \arrow[d, "1"] & & (\{q\},\{s\},\{p\}) \arrow[d, "3"'] & & (\{q\},\emptyset,\{p,s\}) \arrow[d, "1"] \\
(\emptyset,\{p,q,r,s\},\emptyset) & & (\{r\},\{p,q\},\{s\}) & & (\{q\},\{s,r\},\{p\}) & & (\{q,r\},\emptyset,\{p,s\})
\end{tikzcd}
$$

Obr. 4.1: Fragment $\mathcal{K}_P$. Hrana označená ako i je ρ_i-hrana.

Keď neexistuje pravidlo, ktoré odvodzuje priamo hodnotu objektívneho literálu, ale existuje pravidlo, ktoré podopiera jeho neznámu hodnotu, potom môžeme pomocou ρ_3-hrany nepriamo odvodiť jeho neznámu hodnotou.

Ak hodnotu niektorých atómov nemôžeme odvodiť priamo alebo nepriamo a ani pomocou defaultových predpokladov, budeme ich cez ρ_4-hranu považovať za nepravdivé.

V našom príklade v interpretácii $(\emptyset, \{p\}, \emptyset)$ nevieme pre q nič priamo odvodiť. Pravidlo $q \leftarrow p$ ale podopiera jeho neznámu hodnotu. Preto môžeme prijať neznámu hodnotu q a pomocou ρ_3-hrany dostávame interpretáciu $(\emptyset, \{p, q\}, \emptyset)$.

Ani v interpretácii $(\emptyset, \{p, q\}, \emptyset)$ neexistuje priame odvodenie. Existuje ale pravidlo $r \leftarrow \sim s$, ktorého jediný neohodnotený predpoklad $\sim s$ je negatívny literál. Preto môžeme pre s prijať defaultové hodnoty neznáma alebo nepravda a pomocou ρ_2-hrán dostávame dve interpretácie $(\emptyset, \{p, q, s\}, \emptyset)$ a $(\emptyset, \{p, q\}, \{s\})$.

V interpretácii $(\emptyset, \{p, q\}, \{s\})$ môžeme pristúpiť k priamemu odvodeniu. Telo $\sim s$ pravidla $r \leftarrow \sim s$ je pravdivé. Preto cez ρ_1 hranu odvodíme pravdivú hodnotu r a dostávame interpretáciu $(\{r\}, \{p, q\}, \{s\})$.

Definícia 4.1 *Nech P je zovšeobecnený rozšírený logický program.* Kripkeho štruktúra $\mathcal{K}_P$ asociovaná s P *je dvojica* (W, ρ)*, kde:*

- $W = Int_P \cup \{w_\perp\}$*, W je množina možných svetov, Int_P je množina všetkých koherentných interpretácií programu P, $w_\perp$ reprezentuje množinu všetkých nekonzistentných trojíc.*

- *ρ je binárna relácia na $W \times W$ a pozostáva zo štyroch relácií* $\rho = \rho_1 \cup \rho_2 \cup \rho_3 \cup \rho_4$.

  1. *relácia ρ_1 obsahuje množinu dvojích (w_1, w_2) takých, že*
     - $L \in T_{w_2} \setminus T_{w_1} \Rightarrow L' \in F_{w_2} \wedge$
       $\wedge\, (\exists c \in P)(head(c) = L \wedge val_{w_1}(body(c)) = 1)$
     - $L \in U_{w_2} \setminus U_{w_1} \Rightarrow$
       $((\exists c \in P)(head(c) = L \wedge val_{w_1}(body(c)) > 0) \vee$
       $(L \in T_{w_1} \cup U_{w_1})) \wedge$
       $\wedge\, ((\exists c \in P)(head(c) = \sim L \wedge val_{w_1}(body(c)) > 0) \vee$
       $(L \in U_{w_1} \cup F_{w_1}))$
     - $L \in F_{w_2} \setminus F_{w_1} \Rightarrow$
       $(\exists c \in P)(head(c) = \sim L \wedge val_{w_1}(body(c)) = 1)$

     kde L, L' sú navzájom $\neg$-komplementárne objektívne literály.

  2. *relácia ρ_2 obsahuje množinu dvojích (w_1, w_2) takých, že neexistuje ρ_1-hrana (w_1, w_3) a existuje pravidlo, ktorého jediné neohodnotené predpoklady sú negatívne literály. w_2 obsahuje navyše od w_1 ohodnotenie týchto literálov buď na* 1 *alebo* $\frac{1}{2}$.

  3. *relácia ρ_3 obsahuje množinu dvojích (w_1, w_2) takých, že neexistuje ρ_1-hrana (w_1, w_3) a platí*
     - $L \in U_{w_2} \setminus U_{w_1} \Rightarrow L \notin T_{w_1} \wedge$
       $\wedge\, (\exists c \in P)(head(c) = L \wedge val_{w_1}(body(c)) = \frac{1}{2})$

     kde L je objektívny literál.

  4. *relácia ρ_4 obsahuje množinu dvojích (w_1, w_2) takých, že neexistuje $\rho_1 \cup \rho_2 \cup \rho_3$-hrana (w_1, w_3) a platí*
     - $T_{w_2} = T_{w_1}$
     - $U_{w_2} = U_{w_1}$
     - $F_{w_2} = \{L \in \mathcal{H}^\neg \mid L \notin (T_{w_1} \cup U_{w_1})\}$

     kde $\mathcal{H}^\neg$ je rozšírená Herbrandova báza.

Cesty v grafe $\mathcal{K}_P$ nám reprezentujú odvodenia. Našim cieľom je identifikovať tie, ktoré začínajú s nulovou informáciou v prázdnej interpretácii a odvodením sa im podarí dostať do totálnej interpretácie.

Definícia 4.2 *Nech $\mathcal{K}_P$ je Kripkeho štruktúra asociovaná so zovšeobecneným rozšíreným logickým programom P.* ρ-cesta $\langle w_0, w_1, \ldots, w_n\rangle$ *je postupnosť σ hrán (w_0, w_1),(w_2, w_3), ...,$(w_{n-1}, w_n) \in \mathcal{K}_P$ takých, že $(w_i, w_{i+1}) \in \rho$. Hovoríme, že σ je zakorenená vo w_0. Ak v $\mathcal{K}_P$ neexistuje hrana (w_n, w) taká, že $w \neq w_n$, hovoríme, že σ terminuje vo w_n.*

Definícia 4.3 *Nech $\sigma = \langle w_0, w_1, \ldots, w_n\rangle$ je ρ-cesta v $\mathcal{K}_P$. Hovoríme, že σ je správne zakorenená, ak $w_0 = (\emptyset, \emptyset, \emptyset)$.*

Definícia 4.4 *Nech $I = (T_I, U_I, F_I)$ je interpretácia, $L \in U_I$ je objektívny literál.*
Hovoríme, že L je podopretý v *P* vzhľadom na *I, ak*

$$(\exists c \in P)(head(c) = L \wedge val_I(body(c)) = \tfrac{1}{2})$$

Hovoríme, že I je podopretá v *P, ak*

$$(\forall L \in U_I)(L \textit{ je podopretý v } P \textit{ vzhľadom na } I)$$

V príklade 4.1 sme dostali štyri totálne interpretácie. Pri výpočte interpretácií $(\emptyset, \{p, q, r, s\}, \emptyset)$ a $(\{q\}, \{r, s\}, \{p\})$ sme použili defaultový predpoklad $val(s) = \frac{1}{2}$. Dá sa ukázať, že tento predpoklad nie je podopretý, pretože neexistuje pravidlo, ktorého hlava je s a hodnota tela je $\frac{1}{2}$. Preto tieto interpretácie nebudeme považovať za sémantickú špecifikáciu modifikovaného programu $P \oplus U$.

Pri výpočte interpretácie $(\{r\}, \{p, q\}, \{s\})$ sme použili defaultový predpoklad $val(p) = \frac{1}{2}$. Tento predpoklad je však na rozdiel od predchádzajúcich príkladov podopretý pravidlom $p \leftarrow\ \sim q \wedge r$. Preto nám nič nebráni, aby sme túto interpretáciu použili pri sémantickej špecifikácii modifikovaného programu $P \oplus U$.

Veta 4.1 *Nech P je rozšírený logický program, $\mathcal{K}_P$ je Kripkeho štruktúra asociovaná s P. Nech σ je správne zakorenená ρ-cesta v $\mathcal{K}_P$ terminujúca v totálnej interpretácii I podopretej v P. Potom I je čiastočne stabilný model P.*

Dôkaz Nech P je rozšírený logický program, $Q = P^-$ je modifikovaný program P. Nech I je totálna interpretácia $\mathcal{L}_P$ podopretá v P, v ktorej terminuje správne zakorenená ρ-cesta σ v $\mathcal{K}_P$. Nech $J = I^-$. Zostrojíme $\overline{J}$ ku $\overline{Q}$ nasledujúcim spôsobom: $\overline{J}(\overline{A}) = \sup(\{val_J(body(c)) \mid c \in P \wedge head(c) = \sim A\})$. Nakoľko je J modelom Q, $\overline{J}$ je koherentná interpretácia. Teraz nám stačí ukázať, že $\overline{J}$ je t-najmenší model $\overline{Q}$ modulo $\overline{J}$.

Nech $\overline{K} \preceq \overline{J}, \overline{K} \neq \overline{J}$ je model $\overline{Q}$ modulo $\overline{J}$. Nech $M, N \subseteq I$ sú interpretácie v σ také, že $M \subseteq \overline{K} \wedge N \nsubseteq \overline{K}$. Z definície Kripkeho štruktúry vyplýva, že jediný spôsob, ktorým by takáto situácia mohla vzniknúť, je keď N vzniklo z M prijatím defaultového ohodnotenia $\frac{1}{2}$ nejakého objektívneho literálu L, pričom $val_{\overline{K}}(L) = 0$. Ukážeme, že keď I je podopretá v P, takáto situácia nenastane.

Nech c je pravidlo v P, ktoré podopiera L vzhľadom na interpretáciu I. Keďže $val_{\overline{K}}(L) = 0$, musí existovať objektívny literál L' v tele pravidla c taký, že $val_{\overline{K}}(\sim L') < val_I(\sim L')$. To je ale v spore s predpokladom, že $\overline{K} \preceq \overline{J}$. □

Veta 4.2 *Nech P je rozšírený logický program, I je čiastočne stabilný model P. Potom I je podopretá interpretácia v P a existuje ρ-cesta σ v Kripkeho štruktúre $\mathcal{K}_P$, ktorá terminuje v I.*

Dôkaz Nech P je rozšírený logický program, I je čiastočne stabilný model P. Najprv ukážeme, že I je podopretá v P. Nech $L \in U_I$ je objektívny literál, ktorý nie je podopretý v P. Potom L nepatrí do množiny U t-minimálneho modelu programu P modulo I, čo je v spore s predpokladom čiastočnej stability I.

Nech $\overline{Q}$ a $\overline{J}$ sú definované rovnakým spôsobom ako v dôkaze vety 4.1. Nech $\mathcal{H}^+$ je Herbrandova báza programu $\overline{Q}$ modulo $\overline{J}$. ρ-cestu môžeme skonštruovať spätne k postupnosti $\{\Psi^{*\uparrow n}((\emptyset, \emptyset, \mathcal{H}^+))\}_{n=0}^{\infty}$. □

Kapitola 5

Dynamické logické programovanie

V predchádzajúcej kapitole sme videli, ako možno skonštruovať Kripkeho štruktúru asociovanú s rozšíreným logickým programom a ako v nej identifikovať jeho čiastočne stabilné modely. Teraz prikročíme k definícii operácie na Kripkeho štruktúrach. Máme Kripkeho štruktúru $\mathcal{K}_P$, ktorá špecifikuje sémantiku pôvodného programu P a $\mathcal{K}_U$, ktorá špecifikuje sémantiku modifikujúceho programu U. Naším cieľom je skonštruovať Kripkeho štruktúru $\mathcal{K}_{P\oplus U}$, ktorá by špecifikovala sémantiku modifikovaného programu $P \oplus U$.

Ako základ použijeme graf $\mathcal{K}_U$, pretože reprezentuje novšie poznatky. K nemu pripojíme všetky tie časti grafu $\mathcal{K}_P$, ktoré nie sú v konflikte s $\mathcal{K}_U$ a prípadne doplníme ρ_4-hrany všade tam, kde je to potrebné. Najprv však určíme vrcholy $\mathcal{K}_U$, ku ktorým má význam pripájať cesty z $\mathcal{K}_P$. Tieto vrcholy nazveme premosteniami.

Definícia 5.1 *Premostenia grafu $\mathcal{K}_U$ sú*

1. *všetky vrcholy, ktoré terminujú ρ-cestu*
2. *všetky vrcholy, v ktoré sú zdrojom $\rho_2 \cup \rho_3 \cup \rho_4$-hrany*

Program P môže priniesť v bode 1 nové informácie o objektívnych literáloch, ktoré sa v programe U nevyskytujú. V bode 2 preferujeme nejakú informáciu z P pred prijatím defaultových ohodnotení, nepriamym odvodením alebo zúplnením v U.

Definícia 5.2 *Nech w_1 je uzol $\mathcal{K}_P$, w_2 je uzol $\mathcal{K}_U$. Hovoríme, že w_1* nie je v konflikte s *w_2, ak pre každý objektívny literál $L \in w_1 \setminus w_2$ a každé pravidlo $c \in P$ platí, že $body(c)$ je nedefinované alebo*

- *$head(c) = L \Rightarrow val_{w_1}(L) \geq val_{w_2}(body(c))$*
- *$head(c) = \sim L \Rightarrow val_{w_1}(L) \leq val_{w_2}(\sim body(c))$*

Definícia 5.3 *Cestu* $\sigma = \langle w_0, w_1, \ldots, w_n \rangle$ *z* $\mathcal{K}_P$ *môžeme pripojiť k vrcholu* w *z* $\mathcal{K}_P$*, ak* $w_0 \subseteq w$ *a* w_i *nie je v spore s* w*.*

Definícia 5.4 *Nech* $\sigma = \langle w_0, w_1, \ldots, w_n \rangle$ *je* ρ*-cesta z* $\mathcal{K}_P$ *a* w *je premostenie* $\mathcal{K}_U$*. Potom* pripoj σ k w *je nasledujúca čiastočná operácia: ak* σ *možno pripojiť k* w*, potom* $\langle w \cup w_0, w \cup w_1, \ldots, w \cup w_n \rangle$ *je* ρ*-cesta* $\mathcal{K}_{P \oplus U}$*. Ak pre niektoré* i *platí, že* $w \cup w_{i+1}$ *je nekonzistentná množina, nahradíme ju v dvojici* $(w \cup w_i, w \cup w_{i+1})$ *svetom* $w_\perp$ *a zvyšok cesty odstránime.*

Definícia 5.5 *Nech* P *a* U *sú rozšírené logické programy,* $\mathcal{K}_P$ *a* $\mathcal{K}_U$ *sú Kripkeho štruktúry asociované s* P *a* U*.*

Skonštruujeme dynamickú Kripkeho štruktúru $\mathcal{K}_{P \oplus U}$ modifikácie programu P programom U *nasledovne:*

1. *každá* ρ_1*-hrana (resp.* ρ_2*-hrana) z* $\mathcal{K}_U$ *je* ρ_1*-hrana (resp.* ρ_2*-hrana)* $\mathcal{K}_{P \oplus U}$
2. *pre každé premostenie* w *z* $\mathcal{K}_U$ *a každú* $\rho_1 \cup \rho_2 \cup \rho_3$*-cestu* σ *z* $\mathcal{K}_P$*: pripoj* σ *k* w
3. *doplň* ρ_3*-hrany z* $\mathcal{K}_U$ *do* $\mathcal{K}_{P \oplus U}$ *všade tam, kde je to možné*
4. *vytvor* ρ_4*-hrany v* $\mathcal{K}_{P \oplus U}$ *všade tam, kde je to možné*

Teraz popíšeme, ako možno $\mathcal{K}_{P \oplus U}$ využiť na sémantickú špecifikáciu modifikovaného programu P programom U.

V predchádzajúcej kapitole sme videli, ako niektoré cesty v Kripeho štruktúre asociovanej s rozšíreným logickým programom umožnili identifikovať čiastočne stabilné modely. Analogicky budeme postupovať aj pri správne zakorenených cestách terminujúcich v totálnych interpretáciách $\mathcal{K}_{P \oplus U}$. Navyše budeme od nich požadovať, aby boli podopreté v $P \cup U$.

Definícia 5.6 *Nech* P*,* U *sú rozšírené logické programy,* I *je totálna interpretácia* $\mathcal{L}^{\neg}_{P \cup U}$*.*

$$Rejected(I) = \{(L \leftarrow) \in P \mid val_I(L) \neq 1\} \cup \{c \in P \mid head(c) = L \wedge \sup_{d \in U}(\{val_I(body(d)) \mid head(d) = L\}) \leq val_I(body(c)) \wedge val_I(body(c)) \leq \inf_{d \in U}(\{val_I(\sim body(d)) \mid head(d) = \sim L\})$$

Definícia 5.7 *Nech* P*,* U *sú rozšírené logické programy,* $\mathcal{K}_{P \oplus U}$ *je Kripkeho štruktúra asociovaná s* $P \oplus U$*,* I *je totálna interpretácia* $\mathcal{L}^{\neg}_{P \cup U}$*.*
Hovoríme, že I spĺňa podmienku čiastočnej stability*, ak* I *je čiastočne stabilný model programu* $U \cup (P \setminus Rejected(I))$*.*

Veta 5.1 *Nech* P*,* U *sú rozšírené logické programy,* $\mathcal{K}_{P \oplus U}$ *je Kripkeho štruktúra asociovaná s* $P \oplus U$*. Nech* σ *je správne zakorenená* ρ*-cesta z* $\mathcal{K}_{P \oplus U}$ *terminujúca v totálnej interpretácii* I *podopretej v* $P \cup U$*. Potom* I *spĺňa podmienku čiastočnej stability.*

Dôkaz Z definície Kripkeho štruktúry asociovanej s modifikovaným programom $P \oplus U$ vyplýva, že interpretácia I je modelom programu U. Pre všetky pravidlá $c \in P \setminus Rejected(I)$ vďaka podmienke čiastočnej stability platí, že I je modelom c a teda je aj modelom $P \setminus Rejected(I)$.

Čiastočnú stabilitu dokážeme podobne ako v dôkaze vety 4.1. □

Veta 5.2 *Nech P, U sú rozšírené logické programy, I je interpretácia spĺňajúca podmienku čiastočnej stability. Potom I je podopretá interpretácia a existuje ρ-cesta v Kripkeho štruktúre $\mathcal{K}_{P \oplus U}$, ktorá terminuje v I.*

Dôkaz Na základe vety 4.2 je I podopretá v $U \cup (P \setminus Rejected(I))$. Preto je I podopretá aj v $P \cup U$.

Podobne ako v dôkaze vety 4.2 ρ-cestu môžeme skonštruovať spätne k postupnosti $\{\Psi^{*\uparrow n}((\emptyset, \emptyset, \mathcal{H}^+))\}_{n=0}^{\infty}$. Z podmienky čiastočnej stability nám vyplýva bezospornosť použitia hrán z $P \setminus Rejected(I)$. □

Literatúra

[1] J. Šefránek. *A Kripkean Semantics for Dynamic Logic Programming.* 1999

[2] J. A. Leite. *Logic Program Updates.* 1997

[3] T. Przymusinski. *Well-Founded Semantics Coincides With Three-Valued Stable Semantics.* 1989

[4] A. Van Gelder, K. A. Ross, J. S. Schlipf. *The Well-Founded Semantics for General Logic Programs.* 1991

[5] C. V. Damasio, L. M. Pereira. *Default negation in the heads: why not?* 1996

[6] M. Van Emden, R. Kowalski. *The semantics of predicate logic as a programming language.* 1976

[7] M. Gelfond, V. Lifschitz. *Logic programs with classical nagation.* 1989