Diskrétna matematika I.
Skúška.

12.1.2005 ______________________________

Príklady si prečítajte pozorne. Riešenia píšte podrobne, uveďte všetky argumenty. Každý príklad píšte na samostatný papier (kvôli opravovaniu). Nezabudnite každý papier podpísať.

1. (15b.) Nech množina M má n prvkov, kde n je prirodzené číslo. Dokážte, že potenčná množina $\mathcal{P}\ (M)$ množiny M má práve 2^n prvkov.

2. (15b.) Nech A, B sú množiny.

   Dokážte: A aB sú disjunktné práve vtedy, keď $(A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset$.

3. (15b.) Ukážte, že $|\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)| > 1$ práve vtedy, keď $A \cap B \neq \emptyset$.

4. (15b.) Nech R je relácia z A do B. Pripomeňme, že I_A označuje identickú reláciu na A. Dokážte: R je všade definovaná práve vtedy, keď $I_A \subseteq R \circ R^{-1}$.
   vskip 5mm

5. (20b.) Nech n a r sú kladné celé čísla, pričom $n \geq r$.

   a) Koľko riešení má rovnica

   $$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n,$$

   kde každé x_i je kladné celé číslo, $1 \leq i \leq r$?

   b) Koľkými spôsobmi sa dá kladné celé číslo n zapísať ako súčet r kladných sčítancov ($1 \leq r \leq n$), ak na poradí sčítancov záleží ?

6. (30b.) Nech abeceda $\sum = \{w, x, y, z\}$.

   a) Určite počet reťazcov v $\sum^*$ dĺžky 5, ktoré začínajú w.

   b) Určite počet reťazcov v $\sum^*$ dĺžky 5, ktoré obsahujú presne dve w.

   c) Určite počet reťazcov v $\sum^*$ dĺžky 5, ktoré neobsahujú w.

7. (10b.) Dokážte: Pre ľubovoľné prirodzené čísla n a k platí:

   $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Písomka pokračuje na druhej strane

8. (15b.) Nech A a B sú množiny a nech $|B| = 3$. Ak je 4096 rôznych relácii z A do B, čo je $|A|$?

9. (25b.) Nech $p(x)$ a $q(x)$ sú výrokové funkcie s premennou x s daným definičným oborom.

   a) Dokážte, že
   $$\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x) \Rightarrow \forall x[p(x) \vee q(x)].$$

   b) Nájdite protipríklad pre opačnú implikáciu.
   (t.j. Ukážte, že $\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x) \Leftarrow \forall x[p(x) \vee q(x)]$ neplatí.)