Domáca úloha č. 4 a 5

Podrobné riešenia tejto domácej úlohy treba odovzdať na začiatku cvičení v pondelok 12.12.2005. Toto je posledná úloha. Je za 25 bodov (do celkového súčtu sa bude zaratávať 20 bodov; zvyšných 5 je bónus).

- **Príklad 1.**

  a) Pre $n \in \mathcal{N}$ dokážte: $2^{2n+1} + 1$ je deliteľné 3.

  b) (Problém z pošty) Každý celočíselný korunový obnos väčší ako 8 korún sa dá zložiť zo "známok" v hodnote 3 a 5 korún.

  c) Nech $n \in \mathcal{N}$ a $n \geq 2$. Dokážte, že $2^n < \binom{2n}{n} < 4^n$.

- **Príklad 2.** Dokážte, že $A \triangle B = A \triangle C$ platí práve vtedy, keď $B = C$. (symbol $A \triangle B$ označuje v tejto úlohe symetrický rozdiel množín A a B)

- **Príklad 3.**

  a)Nakreslite Vennove diagramy pre nasledovné situácie:

  i) $A \cup B \subset A \cup C$, ale $B \not\subseteq C$;

  ii) $A \cap B \subset A \cap C$, ale $B \not\subseteq C$.

  b) Nájdite príklady množín A, B a C, ktoré spĺňajú vzťah i) a vzťah ii).

- **Príklad 4.** Nájdite množiny A, B a C také, aby platilo $A \cup B = A \cup C$ a zároveň $B \neq C$. (Tento príklad ukazuje, že pri množinovej spojke $\cup$ nemožno krátiť rovnice.)

- **Príklad 5.** Dokážte:

  a) $A \cup B = \emptyset$ platí práve vtedy, keď platí $(A = \emptyset \wedge B = \emptyset)$.

  b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ platí práve vtedy, keď platí $A \subseteq C$.

  c) $A \cup B = A \cap C$ platí práve vtedy, keď platí $B \subseteq A \subseteq C$.

- **Príklad 6.** Ak existuje množina X taká, že $A \cap X = B \cap X$ a $A \cup X = B \cup X$, tak potom platí $A = B$. Dokážte.

- **Príklad 7.** Dokážte, že $A \triangle B = A \cup B$ platí práve vtedy, keď platí $A \cap B = \emptyset$.

- **Príklad 8.** Určte, čomu sa rovná $[B \triangle [(A \triangle B) \triangle C]] \triangle [[A \triangle (C \triangle A)] \triangle B]$.

- **Príklad 9.** Pre každé z nasledujúcich (nepravdivých) tvrdení nakreslite Vennov diagram. Potom nepravdivosť tvrdenia demonštrujte kontrapríkladom:

  a) $A - B = B - A$.

  b) $A \subseteq B \cup C \Rightarrow [(A \subseteq B) \vee (A \subseteq C)]$.

  c) $B \cap C \subseteq A \Rightarrow [(B \subseteq A) \vee (C \subseteq A)]$.

- **Príklad 10.** Dokážte alebo vyvráťte:

  a)
  $$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$$

  b)
  $$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$$

- **Príklad 11.** Nech $A \subseteq B$. Dokážte, že potom pre ľubovoľné C platia nasledovné vzťahy:

  a) $A \cup C \subseteq B \cup C$

  b) $A \cap C \subseteq B \cap C$

  c) $A - C \subseteq B - C$

  d) $C - A \supseteq C - B$

  e) $A^c \supseteq B^c$

- **Príklad 12.** Dokážte: Ak $(a, b) = (b, a)$, tak $a = b$.