Domáca úloha č. 2 a 3

Podrobné riešenia tejto domácej úlohy treba odovzdať (s výrazne označenou skupinou, do ktorej patríte) na začiatku prednášky vo štvrtok 1.12.2005.
Úloha je za 20 bodov.

- **Príklad 1.**

  a) Nájdite tautológiu, ktorá obsahuje najmenej štyri rôzne atomické výroky. Ukážte, že ide naozaj o tautológiu.

  b) Nájdite zložený výrok s tromi atomickými výrokmi, ktorý je pravdivý presne päť-krát z ôsmych možných priradení pravdivostných hodnôt.

- **Príklad 2.**

  a) Definujme logickú spojku $\uparrow$ ("Nand" alebo "Not ... and ...") takto:

  $$p \uparrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q),$$

  kde p a q sú ľubovoľné výroky. Vyjadrite nasledujúce zložené výroky iba s použitím spojky $\uparrow$.

  - i) $p \vee q$
  - ii) $p \wedge q$
  - iii) $\neg p$
  - iv) $p \to q$
  - v) $p \leftrightarrow q$

  b) Definujme logickú spojku $\downarrow$ ("Nor" alebo "Not ... or ...") takto:

  $$p \downarrow q \Leftrightarrow \neg(p \vee q),$$

  kde p a q sú ľubovoľné výroky. Vyjadrite nasledujúce zložené výroky iba s použitím spojky $\downarrow$.

  - i) $p \vee q$
  - ii) $p \wedge q$
  - iii) $\neg p$
  - iv) $p \to q$
  - v) $p \leftrightarrow q$

- **Príklad 3.** Dokážte:

  a) Pre všetky prirodzené čísla a,b platí: Ak sa nedá krátiť zlomok $\frac{a-b}{a+b}$, ak sa nedá krátiť ani $\frac{a}{b}$.

b) Dokážte, že $log_2 3$ nie je racionálne číslo.

- **Príklad 4.** Dokážte:

  a) pre všetky ***kladné*** reálne čísla a,b platí: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

  b) pre všetky reálne čísla a,b také, že $a, b > 1$ platí: $log_a b + log_b a \geq 2$.

- **Príklad 5.** Určte správnosť alebo nesprávnosť nasledujúcich argumentov. Ak je argument správny napíšte zdôvodnenie, ak je nesprávny, nájdite kontrapríklad.

  a)
  $$[p \wedge (p \to q) \wedge (s \vee r) \wedge (r \to \neg q)] \to (s \vee t)$$

  b)
  $$[(p \wedge \neg q) \wedge [p \to (q \to r)]] \to \neg r$$

- **Príklad 6.** Negujte a zjednodušte každý z nasledujúcich výrokov:

  a) $\exists x[p(x) \vee q(x)]$

  b) $\forall x[p(x) \wedge \neg q(x)]$

  c) $\forall x[p(x) \to q(x)]$

  d) $\exists x[(p(x) \vee q(x)) \to r(x)]$

- **Príklad 7.**

  a) Obor nasledujúcich výrokov pozostáva zo všetkých nenulových celých čísel. Určte pravdivostnú hodnotu každého z výrokov.

    - i) $\exists x \exists y[xy = 1]$
    - ii) $\exists x \forall y[xy = 1]$
    - iii) $\forall x \exists y[xy = 1]$
    - iv) $\exists x \exists y[(2x + y = 5) \wedge (x - 3y = -8)]$
    - v) $\exists x \exists y[(3x - y = 7) \wedge (2x + 4y = 3)]$

  b) Zodpovedzte otázky *i) - v)*, ak je obor výrokov všetky nenulové *reálne* čísla.