

Domáca úloha č. 1.

Úlohu odovzdajte na začiatku prednášky 3.novembra. Jasne v nej vyznačte svoje meno a *skupinu*, do ktorej patríte (prípadne meno vášho cvičiaceho). Úloha sa výnimočne odovzdáva na prednáške, lebo v ten týždeň (31.10.) cvičenie odpadne kvôli dekanskému voľnu. Problémy vypracujte čo najpresnejšie a najpodrobnejšie. Úloha je za 10 bodov.

1.

- a) Nájďte koeficient x^2yz^2 v rozvoji $(\frac{x}{2} + y - 3z)^5$.
b) Koľko rôznych sčítancov je v úplnom rozvoji $(\frac{x}{2} + y - 3z)^5$?
c) Aký je súčet všetkých koeficientov v tomto úplnom rozvoji?

2.

- a) Určte počet nezáporných celočíselných riešení sústavy rovníc:

$$z_1 + z_2 + z_3 = 6$$

$$z_1 + z_2 + \dots + z_5 = 15$$

kde $z_i \geq 0, 0 \leq i \leq 5$.

- b) Určte počet nezáporných celočíselných riešení sústavy nerovnic:

$$z_1 + z_2 + z_3 \leq 6$$

$$z_1 + z_2 + \dots + z_5 \leq 15$$

kde $z_i \geq 0, 0 \leq i \leq 5$.

3. Pre každé kladné prirodzé číslo n dokážte:

$$\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots \right] = \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots \right]$$

4.

- a) Nech n a r sú kladné celé čísla a $n \geq r$. Koľko riešení má rovnica:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n,$$

kde každé x_i je kladné celé číslo, $0 \leq i \leq r$.

- b) Koľkými spôsobmi možno zapísať kladné celé číslo n ako súčet r kladných celočíselných sčítancov $0 \leq r \leq n$, ak na poradí sčítancov záleží?

5.

- a) Aký je súčet všetkých päťciferných celých čísel, ktoré dostaneme permutáciou čísl 1, 1, 2, 3 a 4?
b) Nájďte súčet všetkých šesťciferných celých čísel, ktoré dostaneme permutáciou čísl 1, 1, 1, 3, 3 a 7?