

Kvantifikačná logika (dokončenie)

4. prednáška (13. 10. 2004)

Vhodnosť kvantifikačných tabiel


Propositional
Logic

Equational
Logic

Vhodnosť
a úplnosť
Redukcia

- Formula A je **kvantifikačne dokázateľná** z množiny axióm T ($T \vdash A$) práve vtedy, keď existuje uzavreté kvantifikačné tablo pre cieľ A
- **Vhodnosť kvantifikačných tabiel** (soundness)

Ak $T \vdash A$, potom $T \models A$


- Indukciou na konštrukciu tabla z vlastností  logického vyplývania

Kvantifikačne saturované sekventy

Propositional
Logic

Equational
Logic

Vhodnosť
a úplnosť
Redukcia

Sekvent $T \vDash S$ (vetva tabla) je **kvantifikačne saturovaný**, ak je  ekvačne saturovaný a navyše

- ak $\forall x A[x] \in T$, tak $A[\tau] \in T$ pre každý term τ ,
- ak $\exists x A[x] \in S$, tak $A[\tau] \in S$ pre každý term τ ,
- ak $\exists x A[x] \in T$, tak $A[z] \in T$ pre aspoň jednu premennú z ,
- ak $\forall x A[x] \in S$, tak $A[z] \in S$ pre aspoň jednu premennú z .

Úplnosť kvantifikačných tabiel

Propositional
Logic

Equational
Logic

Vhodnosť
a úplnosť
Redukcia

- Gödelova veta o úplnosti (completeness)

Ak $T \models A$, tak $T \vdash A$

- Nepriamo:
 - Predpokladáme $T \not\models A$
 - Každé tablo má otvorenú vetvu
 - Skonstruujeme systematické tablo
 - Otvorené vetvy sú saturované
 - Špeciálny prípad:
konečná vetva saturovaná vzhľadom na vlastné premenné
 - Z otvorenej vetvy skonstruujeme interpretáciu \mathcal{M} (zo syntaktického materiálu) spĺňajúcu všetky predpoklady (teda aj T), ale žiaden cieľ (teda ani A), t. j. $\models^{\mathcal{M}} T$ a $\not\models^{\mathcal{M}} A$, preto $T \not\models A$

Redukcia kvantifikačnej logiky do ekvačnej a propozičnej

Propositional
Logic

Equational
Logic

Vhodnosť
a úplnosť
Redukcia

- Syntaktická redukcia:
 $T \vdash A$ práve vtedy, keď existuje regulárna množina \mathbf{Q} , pre ktorú $T, \mathbf{Q} \vdash_i A$
- Sémantická redukcia:
Existuje regulárna množina \mathbf{Q} taká, že

$$T \models A \text{ práve vtedy, keď } T, \mathbf{Q} \models_i A$$

- Redukcia do propozičnej logiky:

$$T \models A \text{ práve vtedy, keď } T, \mathbf{Eq}, \mathbf{Q} \models_p A$$