

Ekvačná a kvantifikačná logika

3. prednáška (6. 10. 2004)

Propositional
Logic

Equational
Logic

Ekvačná
logika

Vhodnosť
a úplnosť
Redukcia

Kvantifikačná
logika

Jazyk
kvantifikačnej
logiky

Intepretácie,
pravdivosť
a vyplývanie

Saturácia
kvantifikačných
sekventov

Pravidlá pre
kvantifikátory

Kvantifikačné
axiómy

① Propositional Logic

② Equational Logic

① **Ekvačná logika (dokončenie)**

Vhodnosť a úplnosť

Redukcia

② Kvantifikačná logika

Jazyk kvantifikačnej logiky

Intepretácie, pravdivosť a vyplývanie

Saturácia kvantifikačných sekventov

Pravidlá pre kvantifikátory

Kvantifikačné axiómy

Vhodnosť a úplnosť ekvačných tabiel

Propositional
LogicEquational
LogicEkvačná
logikaVhodnosť
a úplnosť
RedukciaKvantifikačná
logikaJazyk
kvantifikačnej
logikyIntepretácie,
pravdivosť
a vyplývanieSaturácia
kvantifikačných
sekvencíPravidlá pre
kvantifikátoryKvantifikačné
axiómy

- Formula A je **ekvačne dokázateľná** z množiny axióm T ($T \vdash_i A$) práve vtedy, keď existuje uzavreté tablo pre cieľ A
- **Vhodnosť a úplnosť ekvačných tabiel** (soundness & completeness)

$$T \vdash_i A \text{ práve vtedy, keď } T \models_i A$$

⇐ Sporom:

Predpokladáme $T \not\models_i A$ a skonštruujeme interpretáciu \mathcal{M} **zo syntaktického materiálu (herbrandovskú)** tak, aby $\models_i^{\mathcal{M}} T$, ale $\not\models_i^{\mathcal{M}} A$

Redukcia ekvačnej logiky do propozičnej

Propositional
Logic

Equational
Logic

Ekvačná
logika

Vhodnosť
a úplnosť
Redukcia

Kvantifikačná
logika

Jazyk
kvantifikačnej
logiky

Intepretácie,
pravdivosť
a vyplývanie

Saturácia
kvantifikačných
sekvencí

Pravidlá pre
kvantifikátory

Kvantifikačné
axiómy

- Syntaktická redukcia

$$T \vdash_i A \text{ práve vtedy, keď } T, \mathbf{Eq} \vdash_p A$$

- Sémantická redukcia

$$T \vDash_i A \text{ práve vtedy, keď } T, \mathbf{Eq}_{A,T} \vDash_p A$$
$$T \vDash_i A \iff T \vdash_i A \iff T, \mathbf{Eq} \vdash_p A \iff T, \mathbf{Eq} \vDash_p A$$

Propositional
Logic

Equational
Logic

Ekvačná
logika

Vhodnosť
a úplnosť
Redukcia

Kvantifikačná
logika

Jazyk
kvantifikačnej
logiky

Intepretácie,
pravdivosť
a vyplývanie
Saturácia
kvantifikačných
sekventov

Pravidlá pre
kvantifikátory
Kvantifikačné
axiómy

① Propositional Logic

② Equational Logic

① Ekvačná logika (dokončenie)

Vhodnosť a úplnosť

Redukcia

② **Kvantifikačná logika**

Jazyk kvantifikačnej logiky

Intepretácie, pravdivosť a vyplývanie

Saturácia kvantifikačných sekventov

Pravidlá pre kvantifikátory

Kvantifikačné axiómy

Jazyk kvantifikačnej logiky

Propositional
Logic

Equational
Logic

Ekvačná
logika

Vhodnosť
a úplnosť
Redukcia


Kvantifikačná
logika

Jazyk
kvantifikačnej
logiky

Intepretácie,
pravdivosť
a vyplývanie
Saturácia
kvantifikačných
sekvencí

Pravidlá pre
kvantifikátory

Kvantifikačné
axiómy

- **Termy** ako v  ekvačnej logike
 - **Formuly**
 - **atomické:** $P_i(\tau_1, \dots, \tau_n)$, ak τ_1, \dots, τ_n sú termy a P_i je predikátový symbol arity n
 - **propozičné:** $\perp, \top, \neg A_1, A_1 \wedge A_2, A_1 \vee A_2, A_1 \rightarrow A_2, A_1 \leftrightarrow A_2$, ak A_1 a A_2 sú formuly
 - **kvantifikačné:**
 - **existenčné:** $\exists x A[x]$,
 - **všeobecné:** $\forall x A[x]$,
- ak $A[x]$ je formula, v ktorej sa môže vyskytovať objektová premenná x

Voľné a viazané premenné

Propositional
Logic

Equational
Logic

Ekvačná
logika

Vhodnosť
a úplnosť
Redukcia

Kvantifikačná
logika

Jazyk
kvantifikačnej
logiky

Intepretácie,
pravdivosť
a vyplývanie
Saturácia
kvantifikačných
sekvencí

Pravidlá pre
kvantifikátory
Kvantifikačné
axiómy

- Premenná x je **viazaná (bound)** vo formulách $\exists x A[x]$ a $\forall x A[x]$
- Premenné, ktoré nie sú viazané, sú **voľné (free)**

$$\exists z x = f(z) \rightarrow \forall y (P(y, x) \vee \exists x y = g(x, x))$$

- Dosadenie: Ak $A[x]$ je formula, v ktorej sa môže vyskytovať premenná x , $A[\tau]$ vznikne dosadením termu τ za voľné výskyty x

- $\tau \equiv ff(7)$

$$\exists z ff(7) = f(z) \rightarrow \forall y (P(y, ff(7)) \vee \exists x y = g(x, x))$$

- Formula bez voľných premenných sa nazýva **veta (sentence)**

Interpretácie a spĺňanie formúl

Propositional
Logic

Equational
Logic

Ekvačná
logika

Vhodnosť
a úplnosť
Redukcia

Kvantifikačná
logika



Jazyk
kvantifikačnej
logiky

Interpretácie,
pravdivosť
a vyplývanie

Saturácia
kvantifikačných
sekvencí

Pravidlá pre
kvantifikátory

Kvantifikačné
axiómy

- **Štruktúry a interpretácie** ako v  ekvačnej logike
- Relácia $\models^{\mathcal{M}} A$:
formula A je **splnená (satisfied; tiež pravdivá)**
v interpretácii \mathcal{M}
 - pre atomické A ako  $\models_i^{\mathcal{M}} A$
 - $\models^{\mathcal{M}} \exists x A[x]$ práve vtedy, keď $\models^{\mathcal{M}'} A[y]$ platí pre aspoň jedno **rozšírenie (expansion)** \mathcal{M}' interpretácie \mathcal{M} o interpretáciu novej premennej y
 - $\models^{\mathcal{M}} \forall x A[x]$ práve vtedy, keď $\models^{\mathcal{M}'} A[y]$ platí pre všetky rozšírenia \mathcal{M}' interpretácie \mathcal{M} o interpretáciu novej premennej y
 - pre propozičné A ($\neg A_1, A_1 \wedge A_2, \dots$) analogicky ako propozičná pravdivosť
- Interpretácia \mathcal{M} spĺňa množinu formúl T ($\models^{\mathcal{M}} T$) práve vtedy, keď pre všetky formuly $A \in T$ platí $\models^{\mathcal{M}} A$

Logické vyplývanie a platné formuly

Propositional
Logic

Equational
Logic

Ekvačná
logika

Vhodnosť
a úplnosť
Redukcia

Kvantifikačná
logika

Jazyk
kvantifikačnej
logiky

Interpretácie,
pravdivosť
a vyplývanie

Saturácia
kvantifikačných
sekvencí

Pravidlá pre
kvantifikátory

Kvantifikačné
axiomy

- Množina formúl S **logicky vyplýva** z množiny formúl T (S is a **logical consequence** of T ; $T \models S$) práve vtedy, keď v každej interpretácii \mathcal{M} spĺňajúcej T platí $\models^{\mathcal{M}} A$ pre aspoň jedno $A \in S$
- Formula A je **platná (valid; $\models A$)**, keď $\emptyset \models \{A\}$, teda keď je A splnená v každej interpretácii

Tautológie, kvázitautológie a platné formuly

Propositional
Logic

Equational
Logic

Ekvačná
logika

Vhodnosť
a úplnosť
Redukcia

Kvantifikačná
logika

Jazyk
kvantifikačnej
logiky

Interpretácie,
pravdivosť
a vyplývanie

Saturácia
kvantifikačných
sekvencí

Pravidlá pre
kvantifikátory

Kvantifikačné
axiómy

- Všetky tautológie sú kvázitautológiami ($\models_p A \implies \models_i A$)
- Všetky kvázitautológie sú platnými formulami ($\models_i A \implies \models A$)
- **Ale nie naopak!**
- $x = y \rightarrow y = x$: kvázitautológia, ale nie tautológia
Z pohľadu propozičnej logiky sú atomické a kvantifikačné formuly **propozičnými premennými**
- $\forall x(a = b \wedge b = c) \rightarrow a = c$:
platná formula, ale nie kvázitautológia
Z pohľadu ekvačnej logiky sú kvantifikačné formuly **propozičnými konštantami**

Saturácia kvantifikačných sekventov

Propositional
Logic

Equational
Logic

Ekvačná
logika

Vhodnosť
a úplnosť
Redukcia

Kvantifikačná
logika

Jazyk
kvantifikačnej
logiky



Interpretácie,
pravdivosť
a vyplývanie

**Saturácia
kvantifikačných
sekventov**

Pravidlá pre
kvantifikátory

Kvantifikačné
axiómy

Logické vyplývanie $T \vDash S$ má nasledujúce vlastnosti, ktoré nám umožnia **saturovať** množiny T a S .

- $\forall x A[x], T \vDash S$ práve vtedy, keď $A[\tau], \forall x A[x], T \vDash S$ pre ľubovoľný term τ
- $T \vDash \exists x A[x], S$ práve vtedy, keď $T \vDash A[\tau], \exists x A[x], S$ pre ľubovoľný term τ
- $\exists x A[x], T \vDash S$ práve vtedy, keď $A[z], \exists x A[x], T \vDash S$ pre **novú premennú** z (nie je voľná v T ani v S)
- $T \vDash \forall x A[x], S$ práve vtedy, keď $T \vDash A[z], \forall x A[x], S$ pre **novú premennú** z
- Všetky saturačné vlastnosti  kvázitautologického a  propozičného vyplývania

Tablové pravidlá pre kvantifikátory

Propositional
Logic

Equational
Logic

Ekvačná
logika

Vhodnosť
a úplnosť
Redukcia

Kvantifikačná
logika

Jazyk
kvantifikačnej
logiky

Interpretácie,
pravdivosť
a vyplývanie
Saturácia
kvantifikačných
sekvencí

**Pravidlá pre
kvantifikátory**

Kvantifikačné
axiómy

- Inštanciačné pravidlá (instantiation rules)

$$\frac{\forall x A[x]}{A[\tau]} (\forall), \quad \frac{\exists x A[x]^*}{A[\tau]^*} (\exists^*)$$

pre ľubovoľný term τ

- Pravidlá s vlastnou premennou (eigen-variable rules)

$$\frac{\exists x A[x]}{A[z]} (\exists), \quad \frac{\forall x A[x]^*}{A[z]^*} (\forall^*),$$

kde z je premenná, ktorá sa v table ešte nevyskytla voľná

Kvantifikačné axiómy

Kvantifikačným pravidlám zodpovedajú kvantifikačné axiómy

- Inštanciačné axiómy

$$\forall x A[x] \rightarrow A[\tau]$$

$$A[\tau] \rightarrow \exists x A[x]$$

pre ľubovoľný term τ

- Axiómy s vlastnými premennými
 - dosvedčujúca (**witnessing**)

$$\exists x A[x] \rightarrow A[z]$$

vlastná premenná z sa nazýva svedok (**witness**)

- kontrapríkladová

$$A[z] \rightarrow \forall x A[x]$$

vlastná premenná z sa nazýva kontrapríklad
(**counterexample**)

pre „vhodnú“ premennú z

Regulárne množiny kvantifikačných axiém

Propositional
Logic

Equational
Logic

Ekvačná
logika

Vhodnosť
a úplnosť
Redukcia

Kvantifikačná
logika

Jazyk
kvantifikačnej
logiky

Intepretácie,
pravdivosť
a vyplývanie

Saturácia
kvantifikačných
sekvencí

Pravidlá pre
kvantifikátory

**Kvantifikačné
axiémy**

Požiadavky na vlastné premenné

- Vlastná premenná axiomy $\exists x A[x] \rightarrow A[z]$ sa nesmie vyskytovať v $\exists x A[x]$
- Vlastná premenná axiomy $A[z] \rightarrow \forall x A[x]$ sa nesmie vyskytovať v $\forall x A[x]$
- Všetky kvantifikačné axiomy použité v table musia tvoriť **regulárnu množinu**, teda je možné usporiadať ich do postupnosti

$$\langle Q_1, Q_2, \dots, Q_n \rangle$$

tak, že **vlastná premenná** axiomy Q_{i+1} , $i < n$,
sa nevyskytuje v žiadnej axiome Q_j pre $1 \leq j \leq i$

Význam kvantifikačných axióm

Propositional
Logic

Equational
Logic

Ekvačná
logika

Vhodnosť
a úplnosť
Redukcia

Kvantifikačná
logika

Jazyk
kvantifikačnej
logiky

Interpretácie,
pravdivosť
a vyplývanie

Saturácia
kvantifikačných
sekvencí

Pravidlá pre
kvantifikátory

**Kvantifikačné
axiomy**

Kvantifikačné axiomy umožnia redukovať kvantifikačnú logiku do ekvačnej:

$$T \models S \text{ práve vtedy, keď } T, \mathbf{Q} \models_i S$$

pre vhodne zvolenú množinu kvantifikačných axióm **Q**