2-INF-264 Teória deklaratívneho programovania

Zimný semester 2015/16
6. prednáška

Ján Komara

Obsah 6. prednášky

Zopakovanie

Primitívne rekurzívne funkcie

- Základný vývoj primitívne rekurzívnych funkcií.
- Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia.
- Párovacia funkcia a aritmetizácia dátových štruktúr.
- Vnorená jednoduchá rekurzia:

$$
\begin{aligned}
f(0, y) &= g(y) \\
f(x+1, y) &= h\Big(x, f(x, s_1(x, y)), f(x, s_2(x, y, f(x, s_1(x, y)))), y\Big).
\end{aligned}
$$

- Regulárne rekurzívne definície s mierou:

$$f(\vec{x}) = \tau[f; \vec{x}].$$

Podmienka regularity $\Gamma_{f(\vec{\rho})} \to \mu[\vec{\rho}] < \mu[\vec{x}]$ pre rekurzívne volanie $f(\vec{\rho})$ funkcie f v terme τ.

Zopakovanie

Cantorova párovacia funkcia (modifikovaná verzia)

$\langle x, y \rangle$	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
0	1	2	4	7	11	16	22	$\cdots$
1	3	5	8	12	17	23	30	$\cdots$
2	6	9	13	18	24	31	39	$\cdots$
3	10	14	19	25	32	40	49	$\cdots$
4	15	20	26	33	41	50	60	$\cdots$
5	21	27	34	42	51	61	72	$\cdots$
6	28	35	43	52	62	73	85	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=0}^{x+y} i + 1 + x.$$

Zopakovanie

Vlastnosti párovacej funkcie

Modifikovaná verzia Cantorovej párovacej funkcie má tieto základné vlastnosti:

$$\langle x_1, x_2\rangle = \langle y_1, y_2\rangle \to x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2$$
$$x < \langle x, y\rangle \wedge y < \langle x, y\rangle$$
$$x = 0 \vee \exists y \exists z\, x = \langle y, z\rangle.$$

Pre $n \geq 3$ zapisujeme $\big\langle x_1, \langle x_2, \ldots, x_n\rangle\big\rangle$ skrátene $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$.

Projekcie

Unárne projekcie π_1 a π_2 spĺňajú tieto identity:

$$\pi_1\langle x, y\rangle = x \qquad \pi_2\langle x, y\rangle = y \qquad \pi_1(0) = 0 = \pi_2(0).$$

Zopakovanie

Rekurzia so substitúciou v parametri

Sú to definície v tvare

$$\begin{aligned} f(0,\vec{y}) &= \rho[\vec{y}] \\ f(x+1,\vec{y}) &= \tau\big[x, f(x,\vec{\sigma}_1[x,\vec{y}]),\ldots, f(x,\vec{\sigma}_k[x,\vec{y}]),\vec{y}\big]. \end{aligned}$$

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na rekurziu so substitúciou v parametri.

Poznámka

Vetu sme dokázali pre prípad $k = 1$.

Vnorená jednoduchá rekurzia

Vnorená jednoduchá rekurzia

Sú to definície v tvare

$$f(0, \vec{y}) = \rho[\vec{y}]$$
$$f(x+1, \vec{y}) = \tau[f(x, \cdot); x, \vec{y}].$$

Alternatívna formulácia (toto je klauzálna forma definície):

$$f(0, \vec{y}) = \rho[\vec{y}]$$
$$f(x+1, \vec{y}) = \theta[x, \vec{z}, \vec{y}] \leftarrow \bigwedge_{i=1}^{k} f(x, \vec{\sigma}_i[x, \vec{y}, z_1, \ldots, z_{i-1}]) = z_i.$$

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na vnorenú jednoduchú rekurziu.

Vnorená jednoduchá rekurzia

Dôkaz vety pre prípad $k = 2$ a jeden parameter, časť prvá

Uvažujme definíciu v tvare

$$f(0, y) = g(y)$$
$$f(x+1, y) = h\Big(x, f(x, s_1(x, y)), f\left(x, s_2\left(x, y, f(x, s_1(x, y))\right)\right), y\Big).$$

Ukážeme najprv, že funkcia histórie $\overline{f}$:

$$\overline{f}(0, y) = \left\langle f(0, y), 0, 0\right\rangle$$
$$\overline{f}(x+1, y) = \Big\langle f(x+1, y), \overline{f}(x, s_1(x, y)), \overline{f}\left(x, s_2\left(x, y, f(x, s_1(x, y))\right)\right)\Big\rangle.$$

je primitívne rekurzívna funkcia.

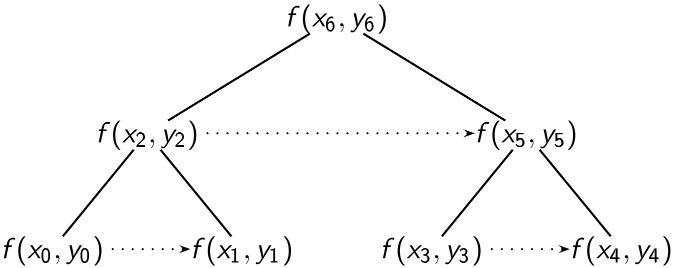
Primitívna rekurzívnosť funkcie f potom plynie z tohoto vyjadrenia

$$f(x, y) = \pi_1 \overline{f}(x, y).$$

Vnorená jednoduchá rekurzia

Dôkaz vety pre prípad $k = 2$ a jeden parameter, časť druhá

Príklad výpočtového stromu pre aplikáciu v tvare $f(2, \cdot)$:



Postupnosť histórie pre aplikáciu $f(x, y)$

$$f(x_0, y_0), f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), \ldots, f(x_j, y_j), \ldots, f(x_i, y_i), \ldots$$

odpovedá spätnému prechodu výpočtového stromu $\overline{f}(x, y)$.

Vnorená jednoduchá rekurzia

Dôkaz vety pre prípad $k = 2$ a jeden parameter, časť tretia

Funkcia $U(x, y, t, i)$ modifikuje čiastočný výpočtový strom t pre aplikáciu $f(x, y)$ v pozícií i hodnotou $f(x_i, y_i)$:

$$U(0, y, t, i) = \langle g(y), 0, 0\rangle$$

$$U(x+1, y, t, i) = \begin{cases} \Big\langle z, U\big(x, s_1(x, y), l, i\big), r\Big\rangle & \text{ak } i < 2^{x+1} \dot{-} 1 \text{ a } t = \langle z, l, r\rangle \text{ pre nejaké } z, l, r; \\ \Big\langle z, l, U\big(x, s_2(x, y, \pi_1(l)), r, j\big)\Big\rangle & \text{ak } i = 2^{x+1} \dot{-} 1 + j \text{ pre } j < 2^{x+1} \dot{-} 1 \text{ a } t = \langle z, l, r\rangle \text{ pre nejaké } z, l, r; \\ \Big\langle h\big(x, \pi_1(l), \pi_1(r), y\big), l, r\Big\rangle & \text{ak } i = 2^{x+2} \dot{-} 2 \text{ a } t = \langle z, l, r\rangle \text{ pre nejaké } z, l, r; \\ 0 & \text{ináč.} \end{cases}$$

Je to rekurzia so substitúciou v parametri, funkcia je preto primitívne rekurzívna.

Vnorená jednoduchá rekurzia

Dôkaz vety pre prípad $k = 2$ a jeden parameter, časť štvrtá

Funkcia $M_i(x, y, t)$ modifikuje čiastočný výpočtový strom t pre aplikáciu $f(x, y)$ v každej pozícií $j < i$ hodnotou $f(x_j, y_j)$:

$$M_0(x, y, t) = t$$
$$M_{i+1}(x, y, t) = U\big(x, y, M_i(x, y, t), i\big).$$

Funkcia $Mkpbt(n)$ vytvorí perfektný binárny strom hĺbky n:

$$Mkpbt(0) = 0$$
$$Mkpbt(n+1) = \big\langle 0, Mkpbt(n), Mkpbt(n)\big\rangle.$$

Funkcia $\overline{f}$(x,y) vytvorí úplný výpočtový strom pre aplikáciu $f(x, y)$:

$$\overline{f}(x, y) = M_{2^{x+1} \dot{-} 1}\big(x, y, Mkpbt(x+1)\big).$$

Všetky funkcie sú primitívne rekurzívne.

Príklady rekurzívnych definícii s mierou

Euklidov algoritmus pre výpočet najväčšieho spoločného deliteľa

Rekurzívna definícia s mierou $\max(x, y)$:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{gcd}(x, y) = \textbf{if } & x \neq 0 \wedge y \neq 0 \textbf{ then} \\
& \quad \textbf{case} \\
& \quad\quad x > y \Rightarrow \mathrm{gcd}(x \dot{-} y, y) \\
& \quad\quad x = y \Rightarrow x \\
& \quad\quad x < y \Rightarrow \mathrm{gcd}(x, y \dot{-} x) \\
& \quad \textbf{end} \\
& \textbf{else} \\
& \quad \max(x, y).
\end{aligned}
$$

Podmienky regularity zaručujú, že výpočet vždy skončí:

$$
\begin{aligned}
x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge x > y &\rightarrow \max(x \dot{-} y, y) < \max(x, y) \\
x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge x < y &\rightarrow \max(x, y \dot{-} x) < \max(x, y).
\end{aligned}
$$

Príklady rekurzívnych definícii s mierou

Aproximačná funkcia pre funkciu gcd

Špecifikácia aproximačnej funkcie

$$z > \max(x, y) \rightarrow f^+(z, x, y) = \gcd(x, y).$$

Definícia aproximačnej funkcie má tvar jednoduchej rekurzie

$$\begin{aligned}
f^+(0, x, y) &= 0 \\
f^+(z+1, x, y) &= \textbf{if } x \neq 0 \land y \neq 0 \textbf{ then} \\
&\quad\quad \textbf{case} \\
&\quad\quad\quad x > y \Rightarrow f^+(z, x \dot{-} y, y) \\
&\quad\quad\quad x = y \Rightarrow x \\
&\quad\quad\quad x < y \Rightarrow f^+(z, x, y \dot{-} x) \\
&\quad\quad \textbf{end} \\
&\quad \textbf{else} \\
&\quad\quad \max(x, y).
\end{aligned}$$

Primitívna rekurzívnosť $\gcd(x, y) = f^+\big(\max(x, y) + 1, x, y\big)$.

Príklady rekurzívnych definícii s mierou

Zarovnanie binárneho stromu

Klauzálna forma rekurzívnej definície:

$$\begin{aligned} \mathit{Flatten}(0) &= 0 \\ \mathit{Flatten}\langle u, 0\rangle &= \left\langle \mathit{Flatten}(u), 0\right\rangle \\ \mathit{Flatten}\left\langle u, \langle v, w\rangle\right\rangle &= \mathit{Flatten}\left\langle \langle u, v\rangle, w\right\rangle. \end{aligned}$$

Je to rekurzia s mierou $m(x)$:

$$\begin{aligned} m(0) &= 0 \\ m\langle v, w\rangle &= m(v) + 2m(w) + 1. \end{aligned}$$

Miera je primitívne rekurzívna funkcia (prečo?).
Podmienky regularity majú tvar

$$\begin{aligned} m(u) &< m\langle u, 0\rangle \\ m\left\langle \langle u, v\rangle, w\right\rangle &< m\left\langle u, \langle v, w\rangle\right\rangle. \end{aligned}$$

Príklady rekurzívnych definícii s mierou

Aproximačná funkcia pre funkciu *Flatten*

Špecifikácia aproximačnej funkcie

$$z > m(x) \to f^+(z, x) = Flatten(x).$$

Definícia aproximačnej funkcie má tvar jednoduchej rekurzie

$$\begin{aligned} f^+(0, x) &= 0 \\ f^+(z+1, 0) &= 0 \\ f^+(z+1, \langle u, 0 \rangle) &= \left\langle f^+(z, u), 0 \right\rangle \\ f^+\big(z+1, \big\langle u, \langle v, w \rangle \big\rangle\big) &= f^+\big(z, \big\langle \langle u, v \rangle, w \big\rangle\big). \end{aligned}$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie *Flatten* plynie z tohoto vyjadrenia

$$Flatten(x) = f^+(m(x) + 1, x).$$

Príklady rekurzívnych definícii s mierou

McCarthyho 91 funkcia

Definícia:

$$\mathrm{f}_{91}(x) = \begin{cases} 91 & \text{ak } x \leq 101, \\ x \dot{-} 10 & \text{ak } x \geq 101. \end{cases}$$

Alternatívne vyjadrenie pomocou vnorenej rekurzie

$$\mathrm{f}_{91}(x) = \textbf{if } x < 101 \textbf{ then } \mathrm{f}_{91}\,\mathrm{f}_{91}(x+11) \textbf{ else } x \dot{-} 10.$$

Je to korektná definícia?
Tvrdíme, že je to spätná rekurzia s mierou $101 \dot{-} x$. Podmienky regularity majú teda tvar

$$x < 101 \rightarrow 101 \dot{-} (x+11) < 101 \dot{-} x$$
$$x < 101 \rightarrow 101 \dot{-} \mathrm{f}_{91}(x+11) < 101 \dot{-} x.$$

Ako splniť druhú podmienku?

Príklady rekurzívnych definícii s mierou

Splnenie podmienok regularity pre McCarthyho 91 funkciu

Uvažujme funkciu f definovanou rekurzívnou rovnosťou

$$f(x) = \textbf{if } x < 101 \textbf{ then } [f]_x[f]_x(x+11) \textbf{ else } x \dot{-} 10. \qquad (1)$$

Tu $[f]_x(y)$ je *zúženie* f na vstupy y také, že $101 \dot{-} y < 101 \dot{-} x$:

$$[f]_x(y) \equiv \textbf{if } 101 \dot{-} y < 101 \dot{-} x \textbf{ then } f(y) \textbf{ else } 0. \qquad (2)$$

Každá rekurzívna aplikácia v (1) je strážená kontextom v tvare (2).
Je to korektná definícia.
Funkcia f spĺňa podmienky regularity pôvodnej rekurzívnej rovnice:

$$x < 101 \to 101 \dot{-} (x+11) < 101 \dot{-} x$$
$$x < 101 \to 101 \dot{-} f(x+11) < 101 \dot{-} x.$$

Táto funkcia je tiež jediným riešením pôvodnej rekurzívnej rovnice.

Príklady rekurzívnych definícii s mierou

Aproximačná funkcia pre McCarthyho 91 funkciu

Špecifikácia aproximačnej funkcie

$$z > 101 \dot{-} x \to f^+(z, x) = \mathrm{f}_{91}(x).$$

Definícia aproximačnej funkcie má tvar vnorenej jednoduchej rekurzie

$$\begin{aligned}
f^+(0, x) &= 0 \\
f^+(z+1, x) &= \textbf{if } x < 101 \textbf{ then} \\
&\qquad f^+\big(z, f^+(z, x+11)\big) \\
&\quad\ \textbf{else} \\
&\qquad x \dot{-} 10.
\end{aligned}$$

Primitívna rekurzívnosť McCarthyho 91 funkcie plynie z tohoto vyjadrenia

$$\mathrm{f}_{91}(x) = f^+(101 \dot{-} x + 1, x).$$

Syntaktická forma rekurzie s mierou

Rekurzia s mierou $\mu[\vec{x}]$

Sú to definície v tvare

$$f(\vec{x}) = \tau\left[[f]^{\mu}_{\vec{x}}; \vec{x}\right]. \tag{1}$$

Term na pravej strane rovnosti vznikol s termu $\tau[f; \vec{x}]$ nahradením každej rekurzívnej aplikácie $f(\vec{\rho})$ výrazom

$$[f]_{\vec{x}}(\vec{\rho}) \equiv \textbf{if } \mu[\vec{\rho}] < \mu[\vec{x}] \textbf{ then } f(\vec{\rho}) \textbf{ else } 0.$$

Každá rekurzívna aplikácia $f(\vec{\rho})$ v (1) je teda strážená podmienkou $\mu[\vec{\rho}] < \mu[\vec{x}]$.

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na rekurziu s mierou.

Syntaktická forma rekurzie s mierou

Dôkaz

Špecifikácia aproximačnej funkcie

$$z > \mu[\vec{x}] \to f^+(z, \vec{x}) = f(\vec{x}).$$

Definícia aprox. funkcie má tvar vnorenej jednoduchej rekurzie

$$\begin{aligned} f^+(0, \vec{x}) &= 0 \\ f^+(z+1, \vec{x}) &= \tau\left[[f^+]^{\mu}_{z,\vec{x}}; z, \vec{x}\right]. \end{aligned}$$

Term na pravej strane druhej rovnosti vznikol s termu $\tau[f; \vec{x}]$ nahradením každej rekurzívnej aplikácie $f(\vec{\rho})$ výrazom

$$[f^+]^{\mu}_{z,\vec{x}}(\vec{\rho}) \equiv \textbf{if } \mu[\vec{\rho}] < \mu[\vec{x}] \textbf{ then } f^+(z, \vec{\rho}) \textbf{ else } 0.$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$f(\vec{x}) = f^+(\mu[\vec{x}] + 1, \vec{x}).$$

Regulárne rekurzívne definície s mierou

Regulárna rekurzia s mierou $\mu[\vec{x}]$

Sú to definície v tvare

$$f(\vec{x}) = \tau[f; \vec{x}], \tag{1}$$

pre ktoré sú splnené podmienky regularity.
Podmienky regularity majú tvar:

$$\Gamma^{\tau}_{f(\vec{\rho})}[f; \vec{x}] \rightarrow \mu\big[\vec{\rho}\big[f; \vec{x}\big]\big] < \mu[\vec{x}]$$

pre každú rekurzívnu aplikáciu $f(\vec{\rho})$ funkcie f, ktorá je strážená podmienkou $\Gamma^{\tau}_{f(\vec{\rho})}$ v terme τ.
Splnenie podmienok regularity sa overuje pre funkciu, ktorá je definovaná pridruženou rovnosťou:

$$f(\vec{x}) = \tau\big[[f]^{\mu}_{\vec{x}}; \vec{x}\big].$$

Táto funkcia je potom jediným riešením funkcionálnej rovnice (1).

Regulárne rekurzívne definície s mierou

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na regulárnu rekurziu s mierou.

Dôkaz

Pridružená rovnosť má tvar syntaktickej formy rekurzie s mierou:

$$f(\vec{x}) = \tau\big[[f]^{\mu}_{\vec{x}}; \vec{x}\big].$$

Funkcia f definovaná týmto vzťahom je preto primitívne rekurzívna.

Poznámka

Číslo $\mu[\vec{x}] + 1$ predstavuje horný odhad na hĺbku výpočtového stromu pre výpočet aplikácie $f(\vec{x})$ pomocou programu

$$f(\vec{x}) = \tau[f; \vec{x}].$$

Charakterizačný problém

Veta

Trieda primitívne rekurzívnych funkcií je najmenšia trieda funkcií, ktorá obsahuje funkciu nasledovníka $\mathrm{S}(x) = x + 1$*, funkciu predchodcu* $x \dot{-} 1$ *a je uzavretá na explicitné definície a regulárnu rekurziu s mierou.*

Dôkaz.

Označenie:

- PRIM = trieda primitívne rekurzívnych funkcií.
- REG = najmenšia trieda funkcií, ktorá obsahuje funkciu nasledovníka $\mathrm{S}(x) = x + 1$, funkciu predchodcu $x \dot{-} 1$ a je uzavretá na explicitné definície a regulárnu rekurziu s mierou.

Cieľom je dokázať rovnosť

$$\mathrm{PRIM} = \mathrm{REG}.$$

Charakterizačný problém

Dôkaz inklúzie PRIM $\subseteq$ REG

- S $\in$ REG, pretože S je základná funkcia triedy REG.
- Z $\in$ REG plynie z tohoto vyjadrenia $\mathrm{Z}(x) = 0$.
- $\mathrm{I}_i^n \in$ REG plynie z tohoto vyjadrenia $\mathrm{I}_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$.
- Trieda REG je uzavretá na operátor kompozície funkcií:

  $$f(x_1, \dots, x_n) = h\big(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)\big).$$

  Je to totiž špeciálny prípad explicitnej definície.
- Trieda REG je uzavretá na operátor primitívnej rekurzie:

  $$f(0, \vec{y}) = g(\vec{y}) \qquad f(x+1, \vec{y}) = h\big(x, f(x, \vec{y}), \vec{y}\big).$$

  Je to špeciálny prípad regulárnej rekurzie s mierou $\mu[x, \vec{y}] = x$:

  $$f(x, \vec{y}) = \textbf{if } x \neq 0 \textbf{ then } h\big(x \dot{-} 1, f(x \dot{-} 1, \vec{y}), \vec{y}\big) \textbf{ else } g(\vec{y}).$$

Charakterizačný problém

Dôkaz inklúzie REG ⊆ PRIM

- S ∈ PRIM, pretože S je základná funkcia triedy PRIM.
- $\lambda x.x \dot{-} 1 \in$ PRIM plynie z tohoto vyjadrenia

$$0 \dot{-} 1 = 0 \qquad\qquad x + 1 \dot{-} 1 = x.$$

- Trieda PRIM je uzavretá na explicitné definície funkcií:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tau[x_1, \ldots, x_n].$$

  Dôkaz tvrdenia na 3. prednáške.
- Trieda PRIM je uzavretá na regulárnu rekurziu s mierou:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tau[f; x_1, \ldots, x_n].$$

  Dôkaz tvrdenia na tejto prednáške.

Záver

5. cvičenie

- Výsledky s komentárom nájdete na webe.

6. cvičenie

- Začína hneď po prednáške v miestnosti F1-248.
- Pracujte samostatne.
- Úlohy odovzdať najneskôr do 12:00 v nedeľu tento týždeň.

7. prednáška

- Poza primitívnu rekurziu:
  - Ackermann-Péterovej funkcia,
  - univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie.
- Obecne rekurzívne funkcie.
- μ-rekurzívne funkcie.