2-INF-264 Teória deklaratívneho programovania

Zimný semester 2015/16

5. prednáška

Ján Komara

Obsah 5. prednášky

Zopakovanie

Primitívne rekurzívne funkcie

- Základný vývoj primitívne rekurzívnych funkcií.
- Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia.
- Párovacia funkcia a aritmetizácia dátových štruktúr.
- Vnorená jednoduchá rekurzia:

$$\begin{aligned} f(0,y) &= g(y) \\ f(x+1,y) &= h\Big(x, f(x, s_1(x,y)), f(x, s_2(x,y,f(x,s_1(x,y)))), y\Big). \end{aligned}$$

- Regulárne rekurzívne definície s mierou:

$$f(\vec{x}) = \tau[f;\vec{x}].$$

Podmienka regularity $\Gamma_{f(\vec{\rho})} \rightarrow \mu[\vec{\rho}] < \mu[\vec{x}]$ pre rekurzívne volanie $f(\vec{\rho})$ funkcie f v terme τ.

Zopakovanie

Explicitné definície predikátov

Sú to definície v tvare

$$P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi[x_1, \ldots, x_n].$$

Veta

Primitívne rekurzívne predikáty sú uzavreté na explicitné definície predikátov s ohraničenými formulami.

Ohraničená minimalizácia

Sú to definície funkcií v tvare (φ je ohraničená formula)

$$f(\vec{x}) = \mu y \leq \tau[\vec{x}]\big[\varphi[\vec{x}, y]\big].$$

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na definície funkcií ohraničenou minimalizáciou.

Zopakovanie

Príklady primitívne rekurzívnych funkcií a predikátov

- Ternárna diskriminačná funkcia

$$\mathrm{D}(x, y, z) = v \leftrightarrow x \neq 0 \wedge v = y \vee x = 0 \wedge v = z.$$

  Notačná konvencia

$$\begin{aligned} D(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &\equiv \textbf{if } \tau_1 \neq 0 \textbf{ then } \tau_2 \textbf{ else } \tau_3 \\ D\big(P_*(\vec{\tau}_1), \tau_2, \tau_3\big) &\equiv \textbf{if } P(\vec{\tau}_1) \textbf{ then } \tau_2 \textbf{ else } \tau_3. \end{aligned}$$

- Rovnosti a nerovnosti:

$$x = y \quad x \neq y \quad x \leq y \quad x < y \quad x \geq y \quad x > y.$$

Zopakovanie

Spätná rekurzia

Sú to definície v tvare

$$f(x, \vec{y}) = \begin{cases} \rho[x] & \text{ak } x \geq \theta[\vec{y}], \\ \tau\,[x, f(x+1, \vec{y}), \vec{y}] & \text{ak } x < \theta[\vec{y}]. \end{cases}$$

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na spätnú rekurziu.

Párovacia funkcia

Cantorova párovacia funkcia

$\mathrm{J}(x, y)$	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
0	0	1	3	6	10	15	21	$\cdots$
1	2	4	7	11	16	22	29	$\cdots$
2	5	8	12	17	23	30	38	$\cdots$
3	9	13	18	24	31	39	48	$\cdots$
4	14	19	25	32	40	49	59	$\cdots$
5	20	26	33	41	50	60	71	$\cdots$
6	27	34	42	51	61	72	84	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

$$\mathrm{J}(x, y) = \sum_{i=0}^{x+y} i + x.$$

Párovacia funkcia

Cantorova párovacia funkcia (modifikovaná verzia)

$\langle x, y \rangle$	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
0	1	2	4	7	11	16	22	$\cdots$
1	3	5	8	12	17	23	30	$\cdots$
2	6	9	13	18	24	31	39	$\cdots$
3	10	14	19	25	32	40	49	$\cdots$
4	15	20	26	33	41	50	60	$\cdots$
5	21	27	34	42	51	61	72	$\cdots$
6	28	35	43	52	62	73	85	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=0}^{x+y} i + 1 + x.$$

Párovacia funkcia

Vlastnosti párovacej funkcie

Modifikovaná verzia Cantorovej párovacej funkcie má tieto základné vlastnosti:

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \langle y_1, y_2 \rangle \to x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2$$
$$x < \langle x, y \rangle \wedge y < \langle x, y \rangle$$
$$x = 0 \vee \exists y \exists z \, x = \langle y, z \rangle.$$

Dôsledok:

$$0 \neq \langle x, y \rangle.$$

Číslo 0 je jediný atom.

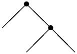
Párovacia funkcia

Párová reprezentácia prirodzených čísel

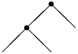
0

$1 = \langle 0, 0 \rangle$

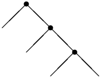
$2 = \langle 0, 1 \rangle$



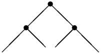
$3 = \langle 1, 0 \rangle$



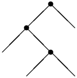
$4 = \langle 0, 2 \rangle$



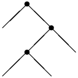
$5 = \langle 1, 1 \rangle$



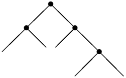
$6 = \langle 2, 0 \rangle$



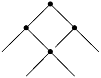
$7 = \langle 0, 3 \rangle$



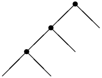
$8 = \langle 1, 2 \rangle$



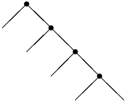
$9 = \langle 2, 1 \rangle$



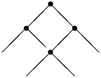
$10 = \langle 3, 0 \rangle$



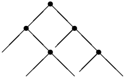
$11 = \langle 0, 4 \rangle$



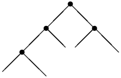
$12 = \langle 1, 3 \rangle$



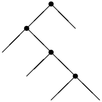
$13 = \langle 2, 2 \rangle$



$14 = \langle 3, 1 \rangle$



$15 = \langle 4, 0 \rangle$



Párovacia funkcia

Projekcie

Unárne projekcie π_1 a π_2 spĺňajú tieto identity:

$$\pi_1\langle x, y\rangle = x$$
$$\pi_2\langle x, y\rangle = y$$
$$\pi_1(0) = 0 = \pi_2(0).$$

Primitívna rekurzívnosť oboch funkcií plynie z tohoto vyjadrenia

$$\pi_1(x) = \mu y < x[\exists z < x\, x = \langle y, z\rangle]$$
$$\pi_2(x) = \mu z < x[\exists y < x\, x = \langle y, z\rangle].$$

Párovacia funkcia

Príklad

Fibonacciho postupnosť je p.r. funkcia:

$$f_0 = 0 \qquad f_1 = 1 \qquad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

Uvažujme totiž funkciu

$$g(n) = \langle f_n, f_{n+1} \rangle.$$

Platí teda

$$f_n = \pi_1\, g(n).$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie g (a tým aj f_n) plynie z

$$\begin{aligned} g(0) &= \langle f_0, f_1 \rangle = \langle 0, 1 \rangle \\ g(n+1) &= \langle f_{n+1}, f_{n+2} \rangle = \big\langle \pi_2\, g(n), f_{n+1} + f_n \big\rangle = \\ &= \big\langle \pi_2\, g(n), \pi_2\, g(n) + \pi_1\, g(n) \big\rangle. \end{aligned}$$

Aritmetizácia karteziánskeho súčinu

Aritmetizácia

Kódom n-tice $(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{N}^n$ je číslo

$$\ulcorner (x_1, \dots, x_n) \urcorner^n \in \mathrm{N},$$

ktoré je definované induktívne takto:

$$\begin{aligned} \ulcorner \emptyset \urcorner^0 &= 0 \\ \ulcorner x \urcorner^1 &= x \\ \ulcorner (x_1, x_2, \dots, x_n) \urcorner^n &= \left\langle x_1, \ulcorner (x_2, \dots, x_n) \urcorner^{n-1} \right\rangle \qquad \text{ak } n \geq 2. \end{aligned}$$

Príklad

Kódovanie dvojíc a trojíc sa prekrýva:

$$\begin{aligned} &\ulcorner (0,1) \urcorner^2 = \langle 0, 1 \rangle = 2 \\ &\ulcorner (0,0,0) \urcorner^3 = \left\langle 0, \ulcorner (0,0) \urcorner^2 \right\rangle = \left\langle 0, \langle 0, 0 \rangle \right\rangle = \langle 0, 1 \rangle = 2. \end{aligned}$$

Aritmetizácia karteziánskeho súčinu

Notácia

Pre $n \geq 3$ zapisujeme $\big\langle x_1, \langle x_2, \ldots, x_n \rangle \big\rangle$ skrátene $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$:

$$\ulcorner (x_1, \ldots, x_n) \urcorner^n = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle.$$

Vlastnosť byť kódom *n*-tice prirodzených čísel

Binárny primitívne rekurzívny predikát $\mathit{Tuple}(n, x)$ platí, ak číslo x je kódom nejakej n-tice prirodzených čísel:

$$\mathit{Tuple}(n, x) \leftrightarrow n = 0 \wedge x = 0 \vee n = 1 \vee n \geq 2 \wedge \pi_2^{n \dot{-} 2}(x) \neq 0.$$

Zdôvodnenie pre $n \geq 2$:

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n \, x = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \leftrightarrow \pi_2^{n-2}(x) \neq 0.$$

Aritmetizácia karteziánskeho súčinu

Projekcia

Zobecnením projekcií π_1 a π_2 je ternárna funkcia $[x]_i^n$ taká, že

$$[\langle x_1, \dots, x_n \rangle]_i^n = x_i \qquad \text{pre } 1 \leq i \leq n.$$

Primitívna rekurzívnosť plynie z tohoto vyjadrenia

$$[x]_i^n = \begin{cases} \pi_1\, \pi_2^{i \dot{-} 1}(x) & \text{ak } 1 \leq i < n, \\ \pi_2^{n \dot{-} 1}(x) & \text{ak } i = n, \\ \dots & \text{ináč.} \end{cases}$$

Zdôvodnenie pre $n \geq 2$:

$$x = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \to \bigwedge_{i=1}^{n-1} x_i = \pi_1\, \pi_2^{i-1}(x) \wedge x_n = \pi_2^{n-1}(x).$$

Rekurzia so substitúciou v parametri

Príklad

Fibonacciho postupnosť

$$f_0 = 0 \qquad f_1 = 1 \qquad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

Efektívna implementácia

$$\begin{aligned} g(0, a, b) &= a \\ g(n+1, a, b) &= g(n, a+b, a) \\ f_0 &= 0 \\ f_{n+1} &= g(n, 1, 0). \end{aligned}$$

Pomocná funkcia $g(n, a, b)$ je definovaná rekurziou podľa n so substitúciou v parametri a a b.
Korektnosť implementácie plynie z tejto vlastnosti

$$g\left(n, f_{k+1}, f_k\right) = f_{n+1+k}.$$

Rekurzia so substitúciou v parametri

Rekurzia so substitúciou v parametri

Sú to definície v tvare

$$f(0,\vec{y}) = \rho[\vec{y}]$$
$$f(x+1,\vec{y}) = \tau\big[x, f(x,\vec{\sigma}_1[x,\vec{y}]),\dots, f(x,\vec{\sigma}_k[x,\vec{y}]),\vec{y}\big].$$

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na rekurziu so substitúciou v parametri.

Poznámka

Vetu dokážeme pre prípad $k = 1$.

Rekurzia so substitúciou v parametri

Dôkaz vety pre prípad $k = 1$ a jeden parameter, časť prvá

Uvažujme definíciu v tvare

$$\begin{aligned} f(0, y) &= g(y) \\ f(x+1, y) &= h\Big(x, f\big(x, s(x, y)\big), y\Big). \end{aligned}$$

Ukážeme, že funkcia histórie $\overline{f}$:

$$\begin{aligned} \overline{f}(0, y) &= \big\langle f(0, y), 0 \big\rangle \\ \overline{f}(x+1, y) &= \Big\langle f(x+1, y), \overline{f}\big(x, s(x, y)\big) \Big\rangle \end{aligned}$$

je primitívne rekurzívna.
Primitívna rekurzívnosť funkcie f potom plynie z tohoto vyjadrenia

$$f(x, y) = \pi_1 \overline{f}(x, y).$$

Rekurzia so substitúciou v parametri

Dôkaz vety pre prípad $k = 1$ a jeden parameter, časť druhá

Selektor pre rekurzívne argumenty

$$\mathbf{x}_i(x) = x \dot{-} i.$$

Selektor pre parametre

$$\mathbf{y}_0(x, y) = y \qquad \mathbf{y}_{i+1}(x, y) = s\big(\mathbf{x}_i(x) \dot{-} 1, \mathbf{y}_i(x, y)\big).$$

Funkcia čiastočnej histórie (spätná rekurzia)

$$\overline{f}(x, y)[i\,..) = \begin{cases} \Big\langle g\big(\mathbf{y}_x(x, y)\big), 0\Big\rangle & \text{ak } i \geq x, \\ \Big\langle h\Big(\mathbf{x}_i(x) \dot{-} 1, \pi_1 \overline{f}(x, y)[i + 1\,..), \mathbf{y}_i(x, y)\Big), & \\ \quad \overline{f}(x, y)[i + 1\,..)\Big\rangle & \text{ak } i < x. \end{cases}$$

Funkcia histórie

$$\overline{f}(x, y) = \overline{f}(x, y)[0\,..).$$

Rekurzia so substitúciou v parametri

Kontrakcia parametrov

Uvažujme definíciu v tvare

$$\begin{aligned} f(0, y_1, y_2) &= g(y_1, y_2) \\ f(x+1, y_1, y_2) &= h\Big(x, f\left(x, s_1(x, y_1, y_2), s_2(x, y_1, y_2)\right), y_1, y_2\Big). \end{aligned}$$

Ukážeme najprv, že binárna funkcia $\langle f\rangle(x, \langle y_1, y_2\rangle) = f(x, y_1, y_2)$ je primitívne rekurzívna:

$$\begin{aligned} &\langle f\rangle(0, y) = g\left([y]^2_1, [y]^2_2\right) \\ &\langle f\rangle(x+1, y) = \\ &\quad h\Big(x, \langle f\rangle\Big(x, \Big\langle s_1\left(x, [y]^2_1, [y]^2_2\right), s_2\left(x, [y]^2_1, [y]^2_2\right)\Big\rangle\Big), [y]^2_1, [y]^2_2\Big). \end{aligned}$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$f(x, y_1, y_2) = \langle f\rangle(x, \langle y_1, y_2\rangle).$$

Rekurzia so substitúciou v parametri

Analýza prípadov

Uvažujme definíciu v tvare

$$
\begin{aligned}
f(0, y) &= g(y) \\
f(x+1, y) &= \begin{cases} h_1\Big(x, f\left(x, s_1(x, y)\right), y\Big) & \text{ak } R(x, y), \\ h_2\Big(x, f\left(x, s_2(x, y)\right), y\Big) & \text{ak } \neg R(x, y). \end{cases}
\end{aligned}
$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$
\begin{aligned}
h(x, z, y) &= \textbf{if } R(x, y) \textbf{ then } h_1(x, z, y) \textbf{ else } h_2(x, z, y) \\
s(x, y) &= \textbf{if } R(x, y) \textbf{ then } s_1(x, y) \textbf{ else } s_2(x, y) \\
f(0, y) &= g(y) \\
f(x+1, y) &= h\Big(x, f\left(x, s(x, y)\right), y\Big).
\end{aligned}
$$

Záver

4. cvičenie

- Výsledky s komentárom nájdete na webe.

5. cvičenie

- Začína hneď po prednáške v miestnosti F1-248.
- Pracujte samostatne.
- Úlohy odovzdať najneskôr do 12:00 v nedeľu tento týždeň.

6. prednáška

- Vnorená jednoduchá rekurzia:

$$\begin{aligned} f(0,y) &= g(y) \\ f(x+1,y) &= h\Big(x, f(x, s_1(x,y)), f(x, s_2(x,y,f(x,s_1(x,y)))), y\Big). \end{aligned}$$

- Regulárne rekurzívne definície s mierou.