2-INF-264 Teória deklaratívneho programovania

Zimný semester 2015/16

4. prednáška

Ján Komara

Obsah 4. prednášky

Zopakovanie

Cieľ predmetu

- Vybudovať matematické základy deklaratívnych programovacích jazykov.

Stručná osnova predmetu

- Primitívne rekurzívne funkcie
  - Aritmetizácia dátových štruktúr.
  - Regulárne rekurzívne definície s mierou.
- Obecne rekurzívne funkcie
  - Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií:
    - Ackermannova funkcia (1928),
    - univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie.
- Čiastočne rekurzívne funkcie
  - Kleeneho prvá veta o rekurzii (veta o pevnom bode).
  - Kleeneho veta o normálnej forme.
  - Churchova téza a algoritmicky nerozhodnuteľné problémy.

Zopakovanie

Primitívne rekurzívne funkcie

- Základné funkcie:
  - konštantná funkcia $\mathrm{Z}(x) = 0$,
  - funkcia nasledovníka $\mathrm{S}(x) = x + 1$,
  - identity (projekcie):

$$\mathrm{I}_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$$

  pre každé $1 \leq i \leq n$.

- Kompozícia (skladanie) funkcií:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = h\big(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)\big).$$

- Primitívna rekurzia:

$$\begin{aligned} f(0, y_1, \ldots, y_n) &= g(y_1, \ldots, y_n) \\ f(\mathrm{S}(x), y_1, \ldots, y_n) &= h\big(x, f(x, y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n\big). \end{aligned}$$

Zopakovanie

Primitívne rekurzívne odvodenia

$$
\begin{aligned}
& & h(x,z,y) &= \mathrm{S}\,\mathrm{I}^3_2(x,z,y) \\
0+y &= y & 0+y &= \mathrm{I}(y) \\
x+1+y &= x+y+1 & \mathrm{S}(x)+y &= h(x,x+y,y) \\
& & h_2(x,z,y) &= \mathrm{I}^3_2(x,z,y)+\mathrm{I}^3_3(x,z,y) \\
0\cdot y &= 0 & 0\cdot y &= \mathrm{Z}(y) \\
(x+1)\cdot y &= x\cdot y+y & \mathrm{S}(x)\cdot y &= h_2(x,x\cdot y,y) \\
& & \mathrm{C}_1(x) &= \mathrm{S}\,\mathrm{Z}(x) \\
& & h_3(y,z,x) &= \mathrm{I}^3_3(y,z,x)\cdot\mathrm{I}^3_2(y,z,x) \\
& & f(0,x) &= \mathrm{C}_1(x) \\
x^0 &= 1 & f\left(\mathrm{S}(y),x\right) &= h_3\left(y,f(y,x),x\right) \\
x^{y+1} &= x\cdot x^y & x^y &= f\left(\mathrm{I}^2_2(x,y),\mathrm{I}^2_1(x,y)\right)
\end{aligned}
$$

Zopakovanie

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na operátor kompozície funkcií a primitívnej rekurzie.

Definícia

Trieda funkcií je primitívne rekurzívne uzavretá, ak obsahuje základné primitívne rekurzívne funkcie a je uzavretá na operátor kompozície funkcií a primitívnej rekurzie.

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú najmenšia primitívne rekurzívne uzavretá trieda funkcií:

$$\bigcap\{\mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ je p. r. uzavretá trieda funkcií}\}.$$

Zopakovanie

Explicitné definície

Sú to definície v tvare

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tau[x_1, \ldots, x_n].$$

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na explicitné definície.

Primitívne rekurzívne definície

Sú to definície v tvare

$$\begin{aligned} f(\vec{y}, 0, \vec{z}) &= \rho[\vec{y}, \vec{z}] \\ f(\vec{y}, x+1, \vec{z}) &= \tau[\vec{y}, x, f(\vec{y}, x, \vec{z}), \vec{z}]. \end{aligned}$$

Veta

Prim. rek. funkcie sú uzavreté na primitívne rekurzívne definície.

Zopakovanie

Príklady primitívne rekurzívnych funkcií

- Sčítanie $x + y$.
- Násobenie $x \cdot y$.
- Umocňovanie x^y.
- Sumačná funkcia
$$\sum_{i=0}^{n} i = 0 + 1 + 2 + \cdots + n.$$
- Modifikované odčítanie
$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y & \text{ak } x \geq y, \\ 0 & \text{ak } x \leq y. \end{cases}$$

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Charakteristická funkcia predikátu

Charakteristická funkcia n-árneho predikátu P je n-árna funkcia P_* definovaná predpisom

$$P_*(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{ak platí } P(x_1, \ldots, x_n), \\ 0 & \text{ak neplatí } P(x_1, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Notačná konvencia $x \; P_* \; y$ pre binárne predikáty s infixovou notáciou. Napr. $x =_* y$, $x \leq_* y$.

Primitívne rekurzívne predikáty

Predikát je primitívne rekurzívny, ak jeho charakteristická funkcia je primitívne rekurzívna funkcia.

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Jazyk formúl

Tvrdenia tvoríme z atomických formúl pomocou logických spojok a kvantifikátorov:

$\neg\varphi$	(negácia)
$\varphi \wedge \psi$	(konjunkcia)
$\varphi \vee \psi$	(disjunkcia)
$\varphi \to \psi$	(implikácia)
$\varphi \leftrightarrow \psi$	(ekvivalencia)
$\forall x \varphi$	(univerzálny kvantifikátor)
$\exists x \varphi$	(existenčný kvantifikátor)
$\forall x \leq \tau\, \varphi \equiv \forall x (x \leq \tau \to \varphi)$	(ohraničený kvantifikátor)
$\exists x \leq \tau\, \varphi \equiv \exists x (x \leq \tau \wedge \varphi)$	(ohraničený kvantifikátor)

Ohraničená formula obsahuje len ohraničené kvantifikátory.

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Notačné konvencie pri zápise formúl

Od najvyššej priority k najmenšej:

- kvantifikátory,
- negácia,
- konjunkcia,
- disjunkcia,
- implikácia a ekvivalencia.

Príklad

Zadanie formuly v úplnej notácií

$$(\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \leftrightarrow ((\neg\varphi_3) \vee ((\exists x \varphi_4) \wedge \varphi_5)))).$$

Jej skrátený zápis

$$\varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \leftrightarrow \neg\varphi_3 \vee \exists x \varphi_4 \wedge \varphi_5.$$

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Explicitné definície predikátov

Sú to definície v tvare

$$P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi[x_1, \ldots, x_n].$$

Nás zaujíma hlavne prípad, keď φ je ohraničená formula.

Príklad

Explicitná definícia predikátu deliteľnosti

$$x \mid y \leftrightarrow \exists z\, y = x \cdot z.$$

Iná definícia tentokrát s ohraničenou formulou

$$x \mid y \leftrightarrow \exists z \leq y\, y = x \cdot z.$$

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Ohraničená minimalizácia

Sú to definície v tvare (φ je ohraničená formula)

$$f(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} \text{najmenšie číslo } y \leq \tau[x_1,\dots,x_n] \text{ také, že platí} \\ \qquad \varphi[x_1,\dots,x_n,y]; \\ 0, \text{ ak také číslo neexistuje.} \end{cases}$$

Skrátený zápis $f(\vec{x}) = \mu y \leq \tau[\vec{x}]\big[\varphi[\vec{x},y]\big]$.

Príklad

Neúplný podiel

$$x \div y = q \leftrightarrow y = 0 \land q = 0 \lor y \neq 0 \land \exists r(x = q{\cdot}y + r \land r < y).$$

Iná definícia tentokrát ohraničenou minimalizáciou

$$x \div y = \mu q \leq x[x < (q+1){\cdot}y].$$

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Diskriminačná funkcia je primitívne rekurzívna

Ternárna diskriminačná funkcia D je definovaná predpisom

$$\mathrm{D}(x, y, z) = v \leftrightarrow x \neq 0 \land v = y \lor x = 0 \land v = z.$$

Notačná konvencia

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &\equiv \textbf{if } \tau_1 \neq 0 \textbf{ then } \tau_2 \textbf{ else } \tau_3 \\ \mathrm{D}\big(P_*(\vec{\tau}_1), \tau_2, \tau_3\big) &\equiv \textbf{if } P(\vec{\tau}_1) \textbf{ then } \tau_2 \textbf{ else } \tau_3. \end{aligned}$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie D plynie z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(0, y, z) &= z \\ \mathrm{D}(x + 1, y, z) &= y. \end{aligned}$$

Je to explicitná definícia s monadickou diskrimináciou.

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Rovnosť je primitívne rekurzívny predikát

Pretože $x = y \leftrightarrow x \dot{-} y + (y \dot{-} x) = 0$, primitívna rekurzívnosť funkcie $x =_* y$ plynie z tohoto vyjadrenia

$$(x =_* y) = \mathrm{D}\big(x \dot{-} y + (y \dot{-} x), 0, 1\big).$$

Boolovské funkcie sú primitívne rekurzívne

Základné boolovské funkcie

$$\begin{aligned}(\neg_* x) = y &\leftrightarrow x \neq 0 \wedge y = 0 \vee x = 0 \wedge y = 1\\ (x \wedge_* y) = z &\leftrightarrow x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z = 1 \vee (x = 0 \vee y = 0) \wedge z = 0.\end{aligned}$$

Primitívna rekurzívnosť bool. funkcií plynie z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned}(\neg_* x) &= \mathrm{D}(x, 0, 1)\\ (x \wedge_* y) &= \mathrm{D}\big(x, \mathrm{D}(y, 1, 0), 0\big).\end{aligned}$$

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Operátor ohraničenej minimalizácie

Je to definícia v tvare

$$f(x, \vec{y}) = \mu z \leq x\, [g(z, \vec{y}) = 1].$$

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na operátor ohraničenej minimalizácie.

Dôkaz.

Primitívna rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$f(0, \vec{y}) = 0$$

$$f(x+1, \vec{y}) = \begin{cases} f(x, \vec{y}) & \text{ak } g\big(f(x, \vec{y}), \vec{y}\big) = 1, \\ x+1 & \text{ak } g\big(f(x, \vec{y}), \vec{y}\big) \neq 1 \text{ a } g(x+1, \vec{y}) = 1, \\ 0 & \text{ináč.} \end{cases}$$

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Veta

Primitívne rekurzívne predikáty sú uzavreté na explicitné definície predikátov s ohraničenými formulami.

Dôkaz.

Explicitná definícia predikátu s ohraničenou formulou:

$$P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi[x_1, \ldots, x_n].$$

Primitívna rekurzívnosť predikátu P_* plynie z tohoto vyjadrenia

$$P_*(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_*[x_1, \ldots, x_n].$$

Tu φ_* je charakteristický term formuly φ:

$$(\varphi \to \varphi_* = 1) \land (\neg\varphi \to \varphi_* = 0).$$

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Konštrukcia φ_* induktívne podľa štruktúry formuly φ

- Nekvantifikátorová formula

$$
\begin{aligned}
(\rho = \tau)_* &\equiv (\rho =_* \tau) \\
(R(\vec{\tau}))_* &\equiv R_*(\vec{\tau}) \\
(\neg\psi)_* &\equiv (\neg_* \psi_*) \\
(\psi \wedge \chi)_* &\equiv (\psi_* \wedge_* \chi_*).
\end{aligned}
$$

- Formula z ohraničeným kvantifikátorom

$$
(\exists y \leq \tau\, \psi[y])_* \equiv \psi_*\Big[\mu y \leq \tau\big[\psi_*[y] = 1\big]\Big].
$$

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Dôsledok

Nerovnosti sú primitívne rekurzívne predikáty.

Dôkaz.

Primitívna rekurzívnosť predikátov plynie z tohoto vyjadrenia

$$
\begin{aligned}
x \leq y &\leftrightarrow \exists z \leq y \, x = z \\
x < y &\leftrightarrow y \not\leq x \\
x \geq y &\leftrightarrow y \leq x \\
x > y &\leftrightarrow y < x.
\end{aligned}
$$

Poznámka

Pretože platí ekvivalencia $x \leq y \leftrightarrow x \dot{-} y = 0$, primitívna rekurzívnosť funkcie $x \leq_* y$ plynie tiež z tohoto vyjadrenia

$$(x \leq_* y) = \mathrm{D}(x \dot{-} y, 0, 1).$$

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na definície funkcií ohraničenou minimalizáciou.

Dôkaz.

Definícia funkcie ohraničenou minimalizáciou:

$$f(\vec{x}) = \mu y \leq \tau[\vec{x}]\big[\varphi[\vec{x}, y]\big].$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned} P(y, \vec{x}) &\leftrightarrow \varphi[\vec{x}, y] \\ g(z, \vec{x}) &= \mu y \leq z[P_*(y, \vec{x}) = 1] \\ f(\vec{x}) &= g(\tau[\vec{x}], \vec{x}). \end{aligned}$$

Spätná rekurzia

Spätná rekurzia

Sú to definície v tvare

$$f(x,\vec{y}) = \begin{cases} \rho[\vec{y}] & \text{ak } x \geq \theta[\vec{y}], \\ \tau\big[x, f(x+1,\vec{y}), \vec{y}\big] & \text{ak } x < \theta[\vec{y}]. \end{cases}$$

Je to špeciálny prípad rekurzie s mierou $\theta[\vec{y}] \dot{-} x$.
Podmienka regularity:

$$x < \theta[\vec{y}] \to \theta[\vec{y}] \dot{-} (x+1) < \theta[\vec{y}] \dot{-} x.$$

Zdôvodnenie: $x < \theta[\vec{y}] \to x < x+1 \leq \theta[\vec{y}]$.

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na spätnú rekurziu.

Spätná rekurzia

Dôkaz.

Uvažujme definíciu v tvare

$$f(x,y) = \begin{cases} g(y) & \text{ak } x \geq b(y), \\ h\big(x, f(x+1,y), y\big) & \text{ak } x < b(y). \end{cases}$$

Tvrdíme, že existuje p.r. funkcia $\hat{f}$ taká, že

$$v + x = b(y) \to \hat{f}(v,y) = f(x,y).$$

Dôkaz:

$$\begin{aligned} \hat{f}(0,y) &= g(y) \\ \hat{f}(v+1,y) &= h\big(b(y) \dot{-} (v+1), \hat{f}(v,y), y\big). \end{aligned}$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$f(x,y) = \hat{f}\big(b(y) \dot{-} x, y\big).$$

Záver

Primitívne rekurzívne funkcie

- Základný vývoj primitívne rekurzívnych funkcií.
- Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia.
- Párovacia funkcia a aritmetizácia dátových štruktúr.
- Vnorená jednoduchá rekurzia:

$$\begin{aligned} f(0,y) &= g(y) \\ f(x+1,y) &= h\Big(x, f\big(x, s_1(x,y)\big), f\big(x, s_2(x,y,f(x,s_1(x,y)))\big), y\Big). \end{aligned}$$

- Regulárne rekurzívne definície s mierou:

$$f(\vec{x}) = \tau[f;\vec{x}].$$

  Podmienka regularity $\Gamma_{f(\vec{\rho})} \to \mu[\vec{\rho}] < \mu[\vec{x}]$ pre rekurzívne volanie $f(\vec{\rho})$ funkcie f v terme τ.

Záver

3. cvičenie

- Výsledky s komentárom nájdete na webe.

4. cvičenie

- Začína hneď po prednáške v miestnosti F1-248.
- Pracujte samostatne.
- Úlohy odovzdať najneskôr do 12:00 v nedeľu tento týždeň.

5. prednáška

- Párovacia funkcia a aritmetizácia dátových štruktúr.
- Rekurzia so substitúciou v parametri.