2-INF-264 Teória deklaratívneho programovania

Zimný semester 2015/16

3. prednáška

Ján Komara

Obsah 3. prednášky

Zopakovanie

Cieľ predmetu

- Vybudovať matematické základy deklaratívnych programovacích jazykov.

Stručná osnova predmetu

- Primitívne rekurzívne funkcie
  - Aritmetizácia dátových štruktúr.
  - Regulárne rekurzívne definície s mierou.
- Obecne rekurzívne funkcie
  - Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií:
    - Ackermannova funkcia (1928),
    - univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie.
- Čiastočne rekurzívne funkcie
  - Kleeneho prvá veta o rekurzii (veta o pevnom bode).
  - Kleeneho veta o normálnej forme.
  - Churchova téza a algoritmicky nerozhodnuteľné problémy.

Zopakovanie

Primitívne rekurzívne funkcie

- Základný vývoj primitívne rekurzívnych funkcií.
- Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia.
- Párovacia funkcia a aritmetizácia dátových štruktúr.
- Vnorená jednoduchá rekurzia:

$$\begin{aligned} f(0,y) &= g(y) \\ f(x+1,y) &= h\Big(x, f(x, s_1(x,y)), f(x, s_2(x,y,f(x,s_1(x,y)))), y\Big). \end{aligned}$$

- Regulárne rekurzívne definície s mierou:

$$f(\vec{x}) = \tau[f;\vec{x}].$$

  Podmienka regularity $\Gamma_{f(\vec{\rho})} \rightarrow \mu[\vec{\rho}] < \mu[\vec{x}]$ pre rekurzívne volanie $f(\vec{\rho})$ funkcie f v terme τ.

Primitívne rekurzívne funkcie

Primitívne rekurzívne funkcie

- Základné funkcie:
  - konštantná funkcia $\mathrm{Z}(x) = 0$,
  - funkcia nasledovníka $\mathrm{S}(x) = x + 1$,
  - identity (projekcie):

$$\mathrm{I}_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$$

  pre každé $1 \leq i \leq n$.
- Kompozícia (skladanie) funkcií:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = h\big(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)\big).$$

- Primitívna rekurzia:

$$\begin{aligned} f(0, y_1, \ldots, y_n) &= g(y_1, \ldots, y_n) \\ f\big(\mathrm{S}(x), y_1, \ldots, y_n\big) &= h\big(x, f(x, y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n\big). \end{aligned}$$

Primitívne rekurzívne funkcie

Primitívne rekurzívne odvodenia

$$
\begin{aligned}
& & h(x,z,y) &= \mathsf{S}\,\mathsf{I}^3_2(x,z,y)\\
0+y &= y & 0+y &= \mathsf{I}(y)\\
x+1+y &= x+y+1 & \mathsf{S}(x)+y &= h(x,x+y,y)\\
& & h_2(x,z,y) &= \mathsf{I}^3_2(x,z,y)+\mathsf{I}^3_3(x,z,y)\\
0\cdot y &= 0 & 0\cdot y &= \mathsf{Z}(y)\\
(x+1)\cdot y &= x\cdot y+y & \mathsf{S}(x)\cdot y &= h_2(x,x\cdot y,y)\\
& & \mathsf{C}_1(x) &= \mathsf{S}\,\mathsf{Z}(x)\\
& & h_3(y,z,x) &= \mathsf{I}^3_3(y,z,x)\cdot \mathsf{I}^3_2(y,z,x)\\
& & f(0,x) &= \mathsf{C}_1(x)\\
x^0 &= 1 & f\left(\mathsf{S}(y),x\right) &= h_3\left(y,f(y,x),x\right)\\
x^{y+1} &= x\cdot x^y & x^y &= f\left(\mathsf{I}^2_2(x,y),\mathsf{I}^2_1(x,y)\right)
\end{aligned}
$$

Primitívne rekurzívne funkcie

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na operátor kompozície funkcií a primitívnej rekurzie.

Dôkaz.

Príklad:

$$\begin{aligned} & & h(x,z,y) &= \mathsf{S}\,\mathsf{I}^3_2(x,z,y) \\ 0+y &= y & 0+y &= \mathsf{I}(y) \\ x+1+y &= x+y+1 & \mathsf{S}(x)+y &= h(x,x+y,y) \\ & & h_2(x,z,y) &= \mathsf{I}^3_2(x,z,y)+\mathsf{I}^3_3(x,z,y) \\ 0\cdot y &= 0 & 0\cdot y &= \mathsf{Z}(y) \\ (x+1)\cdot y &= x\cdot y+y & \mathsf{S}(x)\cdot y &= h_2(x,x\cdot y,y). \end{aligned}$$

Primitívne rekurzívne funkcie

Definícia

Trieda funkcií je primitívne rekurzívne uzavretá, ak obsahuje základné primitívne rekurzívne funkcie a je uzavretá na operátor kompozície funkcií a primitívnej rekurzie.

Príklady

- Trieda všetkých funkcií je primitívne rekurzívne uzavretá.
- Trieda primitívne rekurzívnych funkcií je p. r. uzavretá.
- Trieda Turingovských vypočítateľných funkcií je p. r. uzavretá.

Lema

Primitívne rekurzívne funkcie sú podmnožinou každej primitívne rekurzívne uzavretej triedy funkcií.

Dôkaz.

Indukciou na dĺžku primitívne rekurzívneho odvodenia.

Primitívne rekurzívne funkcie

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú najmenšia primitívne rekurzívne uzavretá trieda funkcií.

Dôkaz.

Označenie:

$$\begin{aligned}\mathsf{PRIM} &= \text{trieda primitívne rekurzívnych funkcií,}\\ \mathsf{MIN} &= \text{najmenšia primitívne rekurzívne uzavretá trieda funkcií}\\ &= \bigcap\{\mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ je p. r. uzavretá trieda funkcií}\}.\end{aligned}$$

Cieľom je dokázať rovnosť PRIM $=$ MIN.

- Inklúzia PRIM $\subseteq$ MIN je dôsledok lemy.
- Inklúzia PRIM $\supseteq$ MIN plynie s primitívne rekurzívnej uzavretosti triedy PRIM.

Explicitné definície

Konštantné funkcie sú primitívne rekurzívne

- Unárne konštantné funkcie

$$\mathrm{C}_m(x) = m.$$

Primitívna rekurzívnosť C_m pomocou induktívneho argumentu

$$\mathrm{C}_0 = \mathrm{Z}$$
$$\mathrm{C}_{m+1}(x) = \mathrm{S}\,\mathrm{C}_m(x).$$

- Konštantné funkcie z ľubovolným počtom argumentov

$$\mathrm{C}^n_m(x_1, \ldots, x_n) = m.$$

Primitívnu rekurzívnosť C^n_m dostaneme z tohoto vyjadrenia

$$\mathrm{C}^n_m(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{C}_m\,\mathrm{I}^n_1(x_1, \ldots, x_n).$$

Explicitné definície

Explicitné definície funkcií

Sú to definície v tvare

$$f(x_1, \dots, x_n) = \tau[x_1, \dots, x_n].$$

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na explicitné definície.

Dôkaz.

Preklad definície induktívne podľa štruktúry termu τ. Napr.

$$f(x, y, z) = g_3\Big(x, g_2(z, g_1(x)), 2\Big).$$

Explicitné definície

Explicitné definície funkcií

Sú to definície v tvare

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tau[x_1, \ldots, x_n].$$

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na explicitné definície.

Dôkaz.

Preklad definície induktívne podľa štruktúry termu τ. Napr.

$$\begin{aligned}
h_1(x, y, z) &= g_1\, \mathrm{I}_1^3(x, y, z) \\
h_2(x, y, z) &= g_2\big(\mathrm{I}_3^3(x, y, z), h_1(x, y, z)\big) \\
f(x, y, z) &= g_3\big(\mathrm{I}_1^3(x, y, z), h_2(x, y, z), \mathrm{C}_2^3(x, y, z)\big).
\end{aligned}$$

Explicitné definície

Príklad

Z predchadzajúcej vety plynie, že ternárna funkcia h definovaná nasledujúcim vzťahom je primitívne rekurzívna funkcia:

$$h(x, z, y) = \mathsf{S}(z).$$

Sčítanie je preto tiež primitívne rekurzívna funkcia:

$$\begin{aligned} 0 + y &= \mathsf{I}(y) \\ \mathsf{S}(x) + y &= h(x, x + y, y). \end{aligned}$$

Primitívne rekurzívne definície

Primitívne rekurzívne definície

Sú to definície v tvare

$$\begin{aligned} f(\vec{y}, 0, \vec{z}) &= \rho[\vec{y}, \vec{z}] \\ f(\vec{y}, x+1, \vec{z}) &= \tau[\vec{y}, x, f(\vec{y}, x, \vec{z}), \vec{z}]. \end{aligned}$$

Špeciálne prípady:

- Iterácia unárnej funkcie

$$\begin{aligned} f^0(x) &= x \\ f^{n+1}(x) &= f\, f^n(x). \end{aligned}$$

- Explicitná definícia s monadickou diskrimináciou

$$\begin{aligned} f(\vec{y}, 0, \vec{z}) &= \rho[\vec{y}, \vec{z}] \\ f(\vec{y}, x+1, \vec{z}) &= \tau[\vec{y}, x, \vec{z}]. \end{aligned}$$

Primitívne rekurzívne definície

Lema

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na primitívne rekurzívne definície s aspoň jedným parametrom.

Dôkaz.

Primitívne rekurzívna definícia s aspoň jedným parametrom $\vec{y}, \vec{z}$:

$$f(\vec{y}, 0, \vec{z}) = \rho[\vec{y}, \vec{z}] \qquad f(\vec{y}, x+1, \vec{z}) = \tau[\vec{y}, x, f(\vec{y}, x, \vec{z}), \vec{z}].$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned}
g(\vec{y}, \vec{z}) &= \rho[\vec{y}, \vec{z}] \\
h(x, a, \vec{y}, \vec{z}) &= \tau[\vec{y}, x, a, \vec{z}] \\
f_1(0, \vec{y}, \vec{z}) &= g(\vec{y}, \vec{z}) \\
f_1(\mathrm{S}(x), \vec{y}, \vec{z}) &= h(x, f_1(x, \vec{y}, \vec{z}), \vec{y}, \vec{z}) \\
f(\vec{y}, x, \vec{z}) &= f_1(x, \vec{y}, \vec{z}).
\end{aligned}$$

Primitívne rekurzívne definície

Lema

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na bezparametrické primitívne rekurzívne definície.

Dôkaz.

Bezparametrická primitívne rekurzívna definícia unárnej funkcie:

$$\begin{aligned} f(0) &= \rho \\ f(x+1) &= \tau[x, f(x)]. \end{aligned}$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie f plynie podľa predošlej lemy z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned} f_1(0, w) &= \rho \\ f_1(x+1, w) &= \tau[x, f_1(x, w)] \\ f(x) &= f_1(x, 0). \end{aligned}$$

Primitívne rekurzívne definície

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na primitívne rekurzívne definície.

Dôsledok

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na operátor iterácie unárnych funkcií:

$$f^0(x) = x \qquad\qquad f^{n+1}(x) = f\, f^n(x).$$

Dôsledok

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na explicitné definície funkcií s monadickou diskrimináciou:

$$f(\vec{y}, 0, \vec{z}) = \rho[\vec{y}, \vec{z}] \qquad\qquad f(\vec{y}, x+1, \vec{z}) = \tau[\vec{y}, x, \vec{z}].$$

Primitívne rekurzívne definície

Príklady primitívne rekurzívnych funkcií

Násobenie

$$0 \cdot y = 0 \qquad (x+1) \cdot y = x \cdot y + y.$$

Umocňovanie

$$x^0 = 1 \qquad x^{y+1} = x \cdot x^y.$$

Sumačná funkcia

$$\sum_{i=0}^{0} i = 0 \qquad \sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{n} i + n + 1.$$

Primitívne rekurzívne definície

Modifikované odčítanie

Definícia

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y & \text{ak } x \geq y, \\ 0 & \text{ak } x \leq y. \end{cases}$$

Príklady primitívne rekurzívnych funkcií

Funkcia predchodcu

$$0 \dot{-} 1 = 0 \qquad\qquad x + 1 \dot{-} 1 = x.$$

Modifikované odčítanie

$$x \dot{-} 0 = x \qquad\qquad x \dot{-} (y + 1) = x \dot{-} y \dot{-} 1.$$

Záver

2. cvičenie

- Výsledky s komentárom nájdete na webe.

3. cvičenie

- Začína hneď po prednáške v miestnosti F1-248.
- Pracujte samostatne.
- Úlohy odovzdať najneskôr do 12:00 v nedeľu tento týždeň.

4. prednáška

- Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia.
- Spätná rekurzia.