

2-AIN-266 Deklaratívne programovanie

Letný semester 2021/22

11. prednáška

Ján Komara

Obsah 11. prednášky

Distančná výučba

Zopakovanie

Rekurzívne nerozhodnuteľné problémy

Rekurzívne polorozhodnuteľné problémy

Turingova úplnosť a totálne funkcionálne programovanie

Záver

Distančná výučba

Pokyny

- ▶ Vypnite si kameru a stlmte si mikrofón.
- ▶ Komunikovať je možné počas celej prednášky.
- ▶ Ak máte otázku alebo chcete niečo povedať, tak zdvihnite ruku.
- ▶ Po vyzvaní zapnite si mikrofón.
- ▶ Po skončení ruku zložte a stlmte si mikrofón.
- ▶ Prezentácia je nahrávaná.
- ▶ Nahrávku z prednášky nájdete v tejto sekcii.
- ▶ Slajdy z prednášky nájdete pod položkou Súbory/Files.

Zopakovanie

Cieľ predmetu

- ▶ Vybudovať matematické základy deklaratívnych programovacích jazykov.

Stručná osnova predmetu

- ▶ Primitívne rekurzívne funkcie
 - ▶ Aritmetizácia dátových štruktúr.
 - ▶ Regulárne rekurzívne definície s mierou.
- ▶ Obecne rekurzívne funkcie
 - ▶ Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií:
 - ▶ Ackermannova funkcia (1928),
 - ▶ univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie.
- ▶ Čiastočne rekurzívne funkcie
 - ▶ Kleeneho prvá veta o rekurzii (veta o pevnom bode).
 - ▶ Kleeneho veta o normálnej forme.
 - ▶ Churchova téza a algoritmicky nerozhodnuteľné problémy.

Zopakovanie

Rekurzívne indexy

Symbolom $\varphi_e^{(n)}$ označujeme n -árnu čiastočne rekurzívnu funkciu definovanú predpisom

$$\varphi_e^{(n)} = \begin{cases} f & \text{ak } e = \ulcorner f \urcorner \text{ pre nejaký } n\text{-árny rek. fun. symbol } f, \\ \emptyset^{(n)} & \text{ináč.} \end{cases}$$

Ak $f = \varphi_e^{(n)}$, tak číslo e nazveme rekurzívnym indexom čiastočnej funkcie f . Čísla v tvare $\ulcorner f \urcorner$ sú dobre vytvorené indexy.

Enumeračná čiastočná funkcia

Symbolom Ψ_n si označíme $(n+1)$ -árnu čiastočnú funkciu:

$$\Psi_n(e, x_1, \dots, x_n) \simeq \varphi_e^{(n)}(x_1, \dots, x_n).$$

Z dôkazu Kleeneho vety o normálnej forme vyplýva, že

$$\Psi_n(e, x_1, \dots, x_n) \simeq U \mu s [T_n(e, x_1, \dots, x_n, s)].$$

Zopakovanie

Veta o enumerácií (Kleene)

Pre každé $n \geq 1$, čiastočná funkcia Ψ_n je čiastočne rekurzívna funkcia, ktorá enumeruje (s opakovaním) triedu n -árnych čiastočne rekurzívnych funkcií, t. j. postupnosť

$$\lambda x_1 \dots x_n . \Psi_n(e, x_1, \dots, x_n) \quad \text{pre } e = 0, 1, 2, \dots$$

je enumerácia triedy n -árnych čiastočne rekurzívnych funkcií.

Veta

Zúplnenie enumeračnej čiastočnej funkcie nie je rekurzívna funkcia.

Veta

Graf enumeračnej čiastočnej funkcie nie je rekurzívny predikát.

Zopakovanie

Churchova téza (1936)

Trieda intuitívne vypočítateľných funkcií nad oborom prirodzených čísel je totožná s triedou obecné rekurzívnych funkcií.

Turingova téza (1936-1937)

Trieda intuitívne vypočítateľných funkcií nad oborom prirodzených čísel je totožná s triedou funkcií vypočítateľných na Turingových strojoch.

Modely (čiastočne) vypočítateľných funkcií

- ▶ obecné rekurzívne funkcie [Herbrand-Gödel, 1931, 1934],
- ▶ λ -definovateľné funkcie [Church, 1932],
- ▶ (čiastočne) μ -rekurzívne funkcie [Kleene, 1935, 1952],
- ▶ Turingove stroje [Turing, 1936-1937],
- ▶ čiastočne rekurzívne funkcie [Kleene, 1952],
- ▶ registrové stroje [napr. Minsky, 1961].

Rekurzivne nerozhodnutelné problémy

Rekurzivne nerozhodnutelné problémy

Rekurzívne nerozhodnuteľné problémy

Problém zastavenia

Aritmetizácia problému zastavenia pre n -árne čiastočne rekurzívne funkcie je $(n+1)$ -árny predikát definovaný predpisom

$$W_e^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi_e^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \downarrow.$$

Veta

Problém zastavenia pre n -árne čiastočne rekurzívne funkcie je rekurzívne nerozhodnuteľný problém.

Dôkaz.

V opačnom prípade by takéto zúplnenie enumeračnej čiastočnej funkcie Ψ_n bola rekurzívna funkcia:

$$f(e, x_1, \dots, x_n) \simeq \begin{cases} \varphi_e^{(n)}(x_1, \dots, x_n) & \text{ak } \varphi_e^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \downarrow, \\ 0 & \text{ak } \varphi_e^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \uparrow. \end{cases}$$

Rekurzívne nerozhodnuteľné problémy

Problém zastavenia

Aritmetizácia problému zastavenia pre n -árne čiastočne rekurzívne funkcie je $(n+1)$ -árny predikát definovaný predpisom

$$W_e^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi_e^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \downarrow.$$

Veta

Problém zastavenia pre n -árne čiastočne rekurzívne funkcie je rekurzívne nerozhodnuteľný problém.

Dôkaz.

V opačnom prípade by takéto zúplnenie enumeračnej čiastočnej funkcie Ψ_n bola rekurzívna funkcia:

$$f(e, x_1, \dots, x_n) \simeq \text{if } W_e^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \text{ then } \Psi_n(e, x_1, \dots, x_n) \text{ else } 0.$$

Rekurzivne nerozhodnutelné problémy

Rekurzívne nerozhodnuteľné problémy

Veta

Problém zastavenia pre enumeračnú čiastočnú funkciu je rekurzívne nerozhodnuteľný problém.

Dôkaz (prípado $n = 1$).

Nech e_1 je rekurzívny index enumeračnej čiastočnej funkcie Ψ_1 :

$$\Psi_1(e, x) \simeq \Psi_2(e_1, e, x).$$

Čiže

$$\varphi_e(x) \downarrow \leftrightarrow \varphi_{e_1}^{(2)}(e, x) \downarrow.$$

Odtiaľ dostaneme

$$W_e(x) \leftrightarrow W_{e_1}^{(2)}(e, x).$$

Z rozhodnuteľnosti problému zastavenia pre Ψ_1 by sme dostali rozhodnuteľnosť všeobecného problému zastavenia.

Rekurzívne nerozhodnuteľné problémy

Veta

Problém zastavenia pre enumeračnú čiastočnú funkciu je rekurzívne nerozhodnuteľný problém.

Dôkaz.

Nech e_n je rekurzívny index enumeračnej čiastočnej funkcie Ψ_n :

$$\Psi_n(e, x_1, \dots, x_n) \simeq \Psi_{n+1}(e_n, e, x_1, \dots, x_n).$$

Čiže

$$\varphi_e^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \downarrow \leftrightarrow \varphi_{e_n}^{(n+1)}(e, x_1, \dots, x_n) \downarrow.$$

Odtiaľ dostaneme

$$W_e^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow W_{e_n}^{(n+1)}(e, x_1, \dots, x_n).$$

Z rozhodnuteľnosti problému zastavenia pre Ψ_n by sme dostali rozhodnuteľnosť všeobecného problému zastavenia.

Rekurzívne polorozhodnuteľné problémy

Rekurzívne polorozhodnuteľné problémy

Rekurzívne polorozhodnuteľné problémy

Čiastočne rekurzívne predikáty

n -árny predikát P je čiastočne rekurzívny, ak existuje n -árna čiastočne rekurzívna funkcia f taká, že

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n) \downarrow.$$

Príklady

- ▶ Každý n -árny rekurzívny predikát P je čiastočne rekurzívny:

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq \text{if } P(x_1, \dots, x_n) \text{ then } 1 \text{ else } \emptyset^{(n)}(x_1, \dots, x_n).$$

- ▶ Aritmetizácia problému zastavenia pre n -árne čiastočne rekurzívne funkcie je $(n+1)$ -árny čiastočne rekurzívny predikát:

$$W_e^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \Psi_n(e, x_1, \dots, x_n) \downarrow.$$

Rekurzívne polorozhodnuteľné problémy

Čiastočne rekurzívne predikáty

n -árny predikát P je čiastočne rekurzívny, ak existuje n -árna čiastočne rekurzívna funkcia f taká, že

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n) \downarrow.$$

Príklady

- ▶ Každý n -árny rekurzívny predikát P je čiastočne rekurzívny:

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq \mu y [P(x_1, \dots, x_n)].$$

- ▶ Aritmetizácia problému zastavenia pre n -árne čiastočne rekurzívne funkcie je $(n+1)$ -árny čiastočne rekurzívny predikát:

$$W_e^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \Psi_n(e, x_1, \dots, x_n) \downarrow.$$

Rekurzívne polorozhodnuteľné problémy

Veta o normálnej forme (Kleene)

Pre každý n -árny čiastočne rekurzívny predikát P existuje číslo e také, že pre všetky čísla x_1, \dots, x_n platí vzťah

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists s T_n(e, x_1, \dots, x_n, s)$$

Dôkaz.

Nech f je n -árna čiastočne rekurzívna funkcia taká, že

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n) \downarrow.$$

Z Kleeneho vety o normálnej forme pre n -árne čiastočne rekurzívne funkcie plynie, že existuje číslo e také, že

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq U \mu s [T_n(e, x_1, \dots, x_n, s)].$$

Rekurzívne polorozhodnuteľné problémy

Veta o normálnej forme (Kleene)

Pre každý n -árny čiastočne rekurzívny predikát P existuje číslo e také, že pre všetky čísla x_1, \dots, x_n platí vzťah

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists s T_n(e, x_1, \dots, x_n, s)$$

Dôkaz.

Nech f je n -árna čiastočne rekurzívna funkcia taká, že

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n) \downarrow.$$

Z Kleeneho vety o normálnej forme pre n -árne čiastočne rekurzívne funkcie plynie, že existuje číslo e také, že

$$f(x_1, \dots, x_n) \downarrow \leftrightarrow \exists s T_n(e, x_1, \dots, x_n, s).$$

Rekurzívne polorozhodnuteľné problémy

Veta (Post)

Predikát je rekurzívny práve vtedy, keď on a jeho negácia sú čiastočne rekurzívne predikáty.

Dôkaz.

Nech n -árny predikát P a jeho negácia sú čiastočne rekurzívne. Z vety o normálnej forme plynie, že existujú čísla e_1, e_2 také, že

$$\begin{aligned}P(x_1, \dots, x_n) &\leftrightarrow \exists s T_n(e_1, x_1, \dots, x_n, s) \\ \neg P(x_1, \dots, x_n) &\leftrightarrow \exists s T_n(e_2, x_1, \dots, x_n, s).\end{aligned}$$

Regulárna minimalizácia definuje n -árnu rekurzívnu funkciu f :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \mu s [T_n(e_1, x_1, \dots, x_n, s) \vee T_n(e_2, x_1, \dots, x_n, s)].$$

Rekurzívnosť predikátu P plynie z tohoto vyjadrenia

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow T_n(e_1, x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)).$$

Rekurzívne polorozhodnuteľné problémy

Projekcie rekurzívnych predikátov

Nech R je $(n+1)$ -árny rekurzívny predikát a nech P je n -árny predikát definovaný predpisom

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists y R(y, x_1, \dots, x_n).$$

Vravíme, že predikát P vznikol (existenčnou) projekciou rekurzívneho predikátu R .

Rekurzívne spočítateľné predikáty

n -árny predikát P je rekurzívne spočítateľný, ak jeho obor pravdivosti je prázdna množina alebo ak existuje unárna rekurzívna funkcia f taká, že

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists y f(y) = \langle x_1, \dots, x_n \rangle.$$

Vravíme, že funkcia f enumeruje predikát P .

Rekurzívne polorozhodnuteľné problémy

Veta

Nech P je n -árny predikát. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- ▶ *P je čiastočne rekurzívny predikát.*
- ▶ *P je projekcia rekurzívneho predikátu.*
- ▶ *P je rekurzívne spočítateľný predikát.*

Dôkaz.

Znenie vety plynie z nasledujúcich troch pomocných tvrdení.

Rekurzívne polorozhodnuteľné problémy

Lema

Každý čiastočne rekurzívny predikát je projekciou rekurzívneho predikátu.

Dôkaz (prípado $n = 1$).

Nech P je unárny čiastočne rekurzívny predikát. Z Kleeneho vety o normálnej forme plynie, že existuje číslo e také, že

$$P(x) \leftrightarrow \exists s T_1(e, x, s).$$

Nasledujúci vzťah definuje binárny rekurzívny predikát R :

$$R(s, x) \leftrightarrow T_1(e, x, s).$$

Predikát P je tak projekciou rekurzívneho predikátu

$$P(x) \leftrightarrow \exists s R(s, x).$$

Rekurzívne polorozhodnuteľné problémy

Lema

Každý čiastočne rekurzívny predikát je projekciou rekurzívneho predikátu.

Dôkaz.

Nech P je n -árny čiastočne rekurzívny predikát. Z Kleeneho vety o normálnej forme plynie, že existuje číslo e také, že

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists s T_n(e, x_1, \dots, x_n, s).$$

Nasledujúci vzťah definuje $(n+1)$ -árny rekurzívny predikát R :

$$R(s, x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow T_n(e, x_1, \dots, x_n, s).$$

Predikát P je tak projekciou rekurzívneho predikátu

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists s R(s, x_1, \dots, x_n).$$

Rekurzívne polorozhodnuteľné problémy

Lema

Každá projekcia rekurzívneho predikátu je rekurzívne spočítateľný predikát.

Dôkaz (prípado $n = 1$).

Nech R je binárny rekurzívny predikát a nech P je jeho projekcia:

$$P(x) \leftrightarrow \exists y R(y, x)$$

Predpokladajme, že predikát P platí pre číslo a . Uvažujme unárnu funkciu f definovanú vzťahom

$$f(z) = \begin{cases} x & \text{ak pre nejaké čísla } y, x \text{ platí} \\ & z = \langle y, x \rangle \text{ a } R(y, x), \\ a & \text{ináč.} \end{cases}$$

f je rekurzívna funkcia, ktorá enumeruje predikát P :

$$P(x) \leftrightarrow \exists z f(z) = x.$$

P je preto rekurzívne spočítateľný predikát.

Rekurzívne polorozhodnuteľné problémy

Lema

Každá projekcia rekurzívneho predikátu je rekurzívne spočítateľný predikát.

Dôkaz (prípád $n = 1$).

Nech R je binárny rekurzívny predikát a nech P je jeho projekcia:

$$P(x) \leftrightarrow \exists y R(y, x)$$

Predpokladajme, že predikát P platí pre číslo a . Uvažujme unárnu funkciu f definovanú vzťahom

$$f(z) = \text{if } Tuple(2, z) \wedge R([z]_1^2, [z]_2^2) \text{ then } [z]_2^2 \text{ else } a.$$

f je rekurzívna funkcia, ktorá enumeruje predikát P :

$$P(x) \leftrightarrow \exists z f(z) = x.$$

P je preto rekurzívne spočítateľný predikát.

Rekurzívne polorozhodnuteľné problémy

Lema

Každá projekcia rekurzívneho predikátu je rekurzívne spočítateľný predikát.

Dôkaz.

Nech R je $(n+1)$ -árny rekurzívny predikát a nech P je jeho projekcia:

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists y R(y, x_1, \dots, x_n)$$

Predpokladajme, že predikát P platí pre čísla a_1, \dots, a_n . Uvažujme unárnu funkciu f definovanú vzťahom

$$f(z) = \begin{cases} \langle x_1, \dots, x_n \rangle & \text{ak pre nejaké čísla } y, x_1, \dots, x_n \text{ platí} \\ & z = \langle y, x_1, \dots, x_n \rangle \text{ a } R(y, x_1, \dots, x_n), \\ \langle a_1, \dots, a_n \rangle & \text{ináč.} \end{cases}$$

f je rekurzívna funkcia, ktorá enumeruje predikát P : s

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists z f(z) = \langle x_1, \dots, x_n \rangle.$$

P je preto rekurzívne spočítateľný predikát.

Rekurzívne polorozhodnuteľné problémy

Lema

Každá projekcia rekurzívneho predikátu je rekurzívne spočítateľný predikát.

Dôkaz.

Nech R je $(n+1)$ -árny rekurzívny predikát a nech P je jeho projekcia:

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists y R(y, x_1, \dots, x_n)$$

Predpokladajme, že predikát P platí pre čísla a_1, \dots, a_n . Uvažujme unárnu funkciu f definovanú vzťahom

$$\langle R \rangle(z) \leftrightarrow R([z]_1^{n+1}, [z]_2^{n+1}, \dots, [z]_{n+1}^{n+1})$$
$$f(z) = \text{if } \text{Tuple}(n+1, z) \wedge \langle R \rangle(z) \text{ then } \pi_2(z) \text{ else } \langle a_1, \dots, a_n \rangle.$$

f je rekurzívna funkcia, ktorá enumeruje predikát P : s

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists z f(z) = \langle x_1, \dots, x_n \rangle.$$

P je preto rekurzívne spočítateľný predikát.

Rekurzívne polorozhodnuteľné problémy

Lema

Každý rekurzívne spočítateľný predikát je čiastočne rekurzívny predikát.

Dôkaz (prípado $n = 1$).

Nech f je unárna rekurzívna funkcia, ktorá enumeruje unárny predikát P :

$$P(x) \leftrightarrow \exists y f(y) = x.$$

Potom neohraničená minimalizácia

$$g(x) \simeq \mu y [f(y) = x]$$

definuje čiastočne rekurzívnu funkcia g takú, že

$$P(x) \leftrightarrow g(x) \downarrow.$$

Rekurzívne polorozhodnuteľné problémy

Lema

Každý rekurzívne spočítateľný predikát je čiastočne rekurzívny predikát.

Dôkaz.

Nech f je unárna rekurzívna funkcia, ktorá enumeruje n -árny predikát P :

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists y f(y) = \langle x_1, \dots, x_n \rangle.$$

Potom neohraničená minimalizácia

$$g(x_1, \dots, x_n) \simeq \mu y [f(y) = \langle x_1, \dots, x_n \rangle]$$

definuje čiastočne rekurzívnu funkcia g takú, že

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow g(x_1, \dots, x_n) \downarrow.$$

Turingova úplnosť a totálne funkcionálne programovanie

Uniformný problém zastavenia

Aritmetizácia uniformného problému zastavenia pre n -árne čiastočne rekurzívne funkcie je unárny predikát definovaný predpisom

$$\text{Tot}_n(e) \leftrightarrow \forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi_e^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \downarrow .$$

Veta

Uniformný problém zastavenia pre n -árne čiastočne rekurzívne funkcie nie je ani rekurzívne polorozhodnuteľný problém.

Dôkaz.

Tvrdenie je dôsledok nasledujúcej lemy, ktorá je sformulovaná a dokázaná pre prípad $n = 1$.

Turingova úplnosť a totálne funkcionálne programovanie

Uniformný problém zastavenia

Aritmetizácia uniformného problému zastavenia pre n -árne čiastočne rekurzívne funkcie je unárny predikát definovaný predpisom

$$\text{Tot}_n(e) \leftrightarrow \forall x_1 \cdots \forall x_n W_e^{(n)}(x_1, \dots, x_n).$$

Veta

Uniformný problém zastavenia pre n -árne čiastočne rekurzívne funkcie nie je ani rekurzívne polorozhodnuteľný problém.

Dôkaz.

Tvrdenie je dôsledok nasledujúcej lemy, ktorá je sformulovaná a dokázaná pre prípad $n = 1$.

Turingova úplnosť a totálne funkcionálne programovanie

Lema (prípád $n = 1$)

Nech P je predikát taký, že $\forall e (P(e) \rightarrow \text{Tot}(e))$. Ak P je čiastočne rekurzívny predikát, potom $\{\varphi_e \mid P(e)\} \subset \{\varphi_e \mid \text{Tot}(e)\}$.

Dôkaz (prípád $\{e \mid P(e)\} \neq \emptyset$).

Existuje rek. fcia k taká, že $\{e \mid P(e)\} = \{k(0), k(1), k(2), \dots\}$. Preto $\{\varphi_e \mid P(e)\} = \{\varphi_{k(0)}, \varphi_{k(1)}, \varphi_{k(2)}, \dots\}$. Nasledujúci vzťah definuje unárnu čiastočne rekurzívnu funkciu f :

$$f(x) \simeq \Psi(k(x), x) + 1.$$

Pretože $\varphi_{k(x)}(x) \downarrow$, f je totálna. Z definície plynie tiež

$$f(x) = \varphi_{k(x)}(x) + 1 \neq \varphi_{k(x)}(x) \quad \text{t.j.} \quad f \neq \varphi_{k(x)}$$

pre každé x . Odtiaľ dostaneme

$$f \notin \{\varphi_e \mid P(e)\} \quad f \in \{\varphi_e \mid \text{Tot}(e)\}.$$

Turingova úplnosť a totálne funkcionálne programovanie

Lema (prípád $n = 1$)

Nech P je predikát taký, že $\forall e (P(e) \rightarrow \text{Tot}(e))$. Ak P je čiastočne rekurzívny predikát, potom $\{\varphi_e \mid P(e)\} \subset \{\varphi_e \mid \text{Tot}(e)\}$.

Dôkaz (prípád $\{e \mid P(e)\} \neq \emptyset$).

Existuje rek. fcia k taká, že $\{e \mid P(e)\} = \{k(0), k(1), k(2), \dots\}$. Preto $\{\varphi_e \mid P(e)\} = \{\varphi_{k(0)}, \varphi_{k(1)}, \varphi_{k(2)}, \dots\}$. Nasledujúci vzťah definuje unárnu čiastočne rekurzívnu funkciu f :

$$f(x) \simeq \Psi(k(x), x) + 1.$$

Pretože $\varphi_{k(x)}(x) \downarrow$, f je totálna. Z definície plynie tiež

$$f(x) = \varphi_{k(x)}(x) + 1 \neq \varphi_{k(x)}(x) \quad \text{t.j.} \quad f \neq \varphi_{k(x)}$$

pre každé x . Odtiaľ dostaneme

$$f \notin \{\varphi_e \mid P(e)\} \quad f \in \{\varphi_e \mid \text{Tot}(e)\}.$$

Turingova úplnosť a totálne funkcionálne programovanie

Lema (prípád $n = 1$)

Nech P je predikát taký, že $\forall e (P(e) \rightarrow \text{Tot}(e))$. Ak P je čiastočne rekurzívny predikát, potom $\{\varphi_e \mid P(e)\} \subset \{\varphi_e \mid \text{Tot}(e)\}$.

Dôkaz (prípád $\{e \mid P(e)\} \neq \emptyset$).

Existuje rek. fcia k taká, že $\{e \mid P(e)\} = \{k(0), k(1), k(2), \dots\}$. Preto $\{\varphi_e \mid P(e)\} = \{\varphi_{k(0)}, \varphi_{k(1)}, \varphi_{k(2)}, \dots\}$. Nasledujúci vzťah definuje unárnu čiastočne rekurzívnu funkciu f :

$$f(x) \simeq \Psi(k(x), x) + 1.$$

Pretože $\varphi_{k(x)}(x) \downarrow$, f je totálna. Z definície plynie tiež

$$f(x) = \varphi_{k(x)}(x) + 1 \neq \varphi_{k(x)}(x) \quad \text{t.j.} \quad f \neq \varphi_{k(x)}$$

pre každé x . Odtiaľ dostaneme

$$f \notin \{\varphi_e \mid P(e)\} \quad f \in \{\varphi_e \mid \text{Tot}(e)\}.$$

Turingova úplnosť a totálne funkcionálne programovanie

Euklidov algoritmus pre výpočet najväčšieho spoločného deliteľa

Implementácia

```
gcd(x, y) = if x ≠ 0 ∧ y ≠ 0 then
    case
        x > y ⇒ gcd(x ÷ y, y)
        x = y ⇒ x
        x < y ⇒ gcd(x, y ÷ x)
    end
else
    max(x, y)
```

Výpočet

Výpočet s argumentami klesajúcimi v miere $\max(x, y)$:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{gcd}(9, 12) & = & \text{gcd}(9, 3) & = & \text{gcd}(6, 3) & = & \text{gcd}(3, 3) & = & 3 \\ 12 & & 9 & & 6 & & 3 & & \\ & & > & & > & & > & & \end{array}$$

Turingova úplnosť a totálne funkcionálne programovanie

Euklidov algoritmus pre výpočet najväčšieho spoločného deliteľa

Implementácia

```
gcd(x, y) = if x ≠ 0 ∧ y ≠ 0 then
  case
    x > y ⇒ gcd(x ÷ y, y)
    x = y ⇒ x
    x < y ⇒ gcd(x, y ÷ x)
  end
else
  max(x, y)
```

Výpočet

Podmienky regularity zaručujú, že výpočet vždy skončí:

$$x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge x > y \rightarrow \max(x \div y, y) < \max(x, y)$$

$$x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge x < y \rightarrow \max(x, y \div x) < \max(x, y).$$

Turingova úplnosť a totálne funkcionálne programovanie

Euklidov algoritmus pre výpočet najväčšieho spoločného deliteľa

Implementácia

```
gcd(x, y) = if x ≠ 0 ∧ y ≠ 0 then
    case
        x > y ⇒ gcd(x ÷ y, y)
        x = y ⇒ x
        x < y ⇒ gcd(x, y ÷ x)
    end
else
    max(x, y)
```

Výpočet

Podmienka $x \neq 0 \wedge y \neq 0$ sa zbytočne opakovane vyhodnocuje

$$\text{gcd}(9, 12) = \text{gcd}(9, 3) = \text{gcd}(6, 3) = \text{gcd}(3, 3) = 3$$

Turingova úplnosť a totálne funkcionálne programovanie

Euklidov algoritmus pre výpočet najväčšieho spoločného deliteľa

Alternatívna implementácia so vstupnou podmienkou

```
x ≠ 0 ∧ y ≠ 0 → gcd(x, y) = case
    x > y ⇒ gcd(x ÷ y, y)
    x = y ⇒ x
    x < y ⇒ gcd(x, y ÷ x)
end
```

Výpočet

Ten nemusí skončiť:

$$\text{gcd}(1, 0) = \text{gcd}(1 \div 0, 0) = \text{gcd}(1, 0) = \dots$$

Program počíta čiastočnú funkciu!

Turingova úplnosť a totálne funkcionálne programovanie

Euklidov algoritmus pre výpočet najväčšieho spoločného deliteľa

Alternatívna implementácia so vstupnou podmienkou

```
x ≠ 0 ∧ y ≠ 0 → gcd(x, y) = case
    x > y ⇒ gcd(x ÷ y, y)
    x = y ⇒ x
    x < y ⇒ gcd(x, y ÷ x)
end
```

Výpočet

Rozšírené podmienky regularity pre mieru $\max(x, y)$:

$x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge x > y \rightarrow \max(x \div y, y) < \max(x, y) \wedge x \div y \neq 0 \wedge y \neq 0$

$x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge x < y \rightarrow \max(x, y \div x) < \max(x, y) \wedge x \neq 0 \wedge y \div x \neq 0.$

Výpočet skončí pre vstupy spĺňajúce vstupnú podmienku.

Turingova úplnosť a totálne funkcionálne programovanie

Turing completeness and total functional programming

Evaluator of a programming language \mathcal{L}

Let M describe a single computation step of \mathcal{L} and P its final configuration. Evaluator of \mathcal{L} is the unlimited iteration of M s.t.

$$M^*(x) = \begin{cases} M^k(x) & \text{if } P M^k(x) \text{ and } k \text{ is the least such number,} \\ 0 & \text{if there is no such number.} \end{cases}$$

Program for computing the evaluator M^* :

$$\exists k P M^k(x) \rightarrow M^*(x) = \text{if } P(x) \text{ then } x \text{ else } M^* M(x).$$

Condition of regularity of the program:

$$\exists k P M^k(x) \wedge \neg P(x) \rightarrow t M(x) < t(x) \wedge \exists k P M^k M(x),$$

where $t(x) = \mu k [\exists l P M^l(x) \rightarrow P M^k(x)]$ is the number of computation steps from the configuration x (zero for infinite loop).

Turing completeness and total functional programming

Evaluator of a programming language \mathcal{L}

Let M describe a single computation step of \mathcal{L} and P its final configuration. Evaluator of \mathcal{L} is the unlimited iteration of M s.t.

$$M^*(x) = \begin{cases} M^k(x) & \text{if } P M^k(x) \text{ and } k \text{ is the least such number,} \\ 0 & \text{if there is no such number.} \end{cases}$$

Program for computing the evaluator M^* :

$$\exists k P M^k(x) \rightarrow M^*(x) = \text{if } P(x) \text{ then } x \text{ else } M^* M(x).$$

Condition of regularity of the program:

$$\exists k P M^k(x) \wedge \neg P(x) \rightarrow t M(x) < t(x) \wedge \exists k P M^k M(x),$$

where $t(x) = \mu k [\exists l P M^l(x) \rightarrow P M^k(x)]$ is the number of computation steps from the configuration x (zero for infinite loop).

Turing completeness and total functional programming

Evaluator of a programming language \mathcal{L}

Let M describe a single computation step of \mathcal{L} and P its final configuration. Evaluator of \mathcal{L} is the unlimited iteration of M s.t.

$$M^*(x) = \begin{cases} M^k(x) & \text{if } P M^k(x) \text{ and } k \text{ is the least such number,} \\ 0 & \text{if there is no such number.} \end{cases}$$

Program for computing the evaluator M^* :

$$\exists k P M^k(x) \rightarrow M^*(x) = \text{if } P(x) \text{ then } x \text{ else } M^* M(x).$$

Condition of regularity of the program:

$$\exists k P M^k(x) \wedge \neg P(x) \rightarrow t M(x) < t(x) \wedge \exists k P M^k M(x),$$

where $t(x) = \mu k [\exists l P M^l(x) \rightarrow P M^k(x)]$ is the number of computation steps from the configuration x (zero for infinite loop).

Turing completeness and total functional programming

Evaluator of a programming language \mathcal{L}

Let M describe a single computation step of \mathcal{L} and P its final configuration. Evaluator of \mathcal{L} is the unlimited iteration of M s.t.

$$M^*(x) = \begin{cases} M^k(x) & \text{if } P M^k(x) \text{ and } k \text{ is the least such number,} \\ 0 & \text{if there is no such number.} \end{cases}$$

Program for computing the evaluator M^* :

$$\exists k P M^k(x) \rightarrow M^*(x) = \text{if } P(x) \text{ then } x \text{ else } M^* M(x).$$

Condition of regularity of the program:

$$\exists k P M^k(x) \wedge \neg P(x) \rightarrow t M(x) < t(x) \wedge \exists k P M^k M(x),$$

where $t(x) = \mu k [\exists l P M^l(x) \rightarrow P M^k(x)]$ is the number of computation steps from the configuration x (zero for infinite loop).

Turing completeness and total functional programming

Evaluator of a programming language \mathcal{L}

Let M describe a single computation step of \mathcal{L} and P its final configuration. Evaluator of \mathcal{L} is the unlimited iteration of M s.t.

$$M^*(x) = y \leftrightarrow \exists k (PM^k(x) \wedge \forall l < k \neg PM^l(x) \wedge y = M^k(x)) \vee \neg \exists k PM^k(x) \wedge y = 0.$$

Program for computing the evaluator M^* :

$$\exists k PM^k(x) \rightarrow M^*(x) = \text{if } P(x) \text{ then } x \text{ else } M^* M(x).$$

Condition of regularity of the program:

$$\exists k PM^k(x) \wedge \neg P(x) \rightarrow t M(x) < t(x) \wedge \exists k PM^k M(x),$$

where $t(x) = \mu k [\exists l PM^l(x) \rightarrow PM^k(x)]$ is the number of computation steps from the configuration x (zero for infinite loop).

Záver

10. cvičenie

- ▶ Výsledky s komentárom nájdete v MS Teams.

11. cvičenie

- ▶ Začína hneď po prednáške.
- ▶ Úlohy odovzdať do MOODLE najneskôr do 18:00 v sobotu tento týždeň.

2. test

- ▶ 10 otázok typu ÁNO/NIE za 10 bodov. Termín po dohode.

Koniec prednášky