2-AIN-266 Deklaratívne programovanie

Letný semester 2021/22

9. prednáška

Ján Komara

Obsah 9. prednášky

Distančná výučba

Pokyny

- Vypnite si kameru a stlmte si mikrofón.
- Komunikovať je možné počas celej prednášky.
- Ak máte otázku alebo chcete niečo povedať, tak zdvihnite ruku.
- Po vyzvaní zapnite si mikrofón.
- Po skončení ruku zložte a stlmte si mikrofón.
- Prezentácia je nahrávaná.
- Nahrávku z prednášky nájdete v tejto sekcii.
- Slajdy z prednášky nájdete pod položkou Súbory/Files.

Zopakovanie

Cieľ predmetu

- Vybudovať matematické základy deklaratívnych programovacích jazykov.

Stručná osnova predmetu

- Primitívne rekurzívne funkcie
  - Aritmetizácia dátových štruktúr.
  - Regulárne rekurzívne definície s mierou.
- Obecne rekurzívne funkcie
  - Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií:
    - Ackermannova funkcia (1928),
    - univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie.
- Čiastočne rekurzívne funkcie
  - Kleeneho prvá veta o rekurzii (veta o pevnom bode).
  - Kleeneho veta o normálnej forme.
  - Churchova téza a algoritmicky nerozhodnuteľné problémy.

Zopakovanie

Primitívne rekurzívne funkcie (charakterizácia)

Trieda primitívne rekurzívnych funkcií je najmenšia trieda funkcií, ktorá obsahuje funkciu nasledovníka $S(x) = x + 1$, funkciu predchodcu $x \dot{-} 1$ a je uzavretá na explicitné definície a regulárne rekurzívne definície s mierou.

Obecne rekurzívne funkcie (definícia)

Trieda obecne rekurzívnych funkcií je najmenšia trieda funkcií, ktorá obsahuje funkciu nasledovníka $S(x) = x + 1$, funkciu predchodcu $x \dot{-} 1$ a je uzavretá na explicitné definície a regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií.

Obecne rekurzívne funkcie, ktoré nie sú primitívne rekurzívne

- Ackermannova funkcia (1928).
- Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie.

Zopakovanie

Čiastočné funkcie

n-árna čiastočná funkcia f je jednoznačná relácia z N^n do N:

$$(\vec{x}, y) \in f \land (\vec{x}, z) \in f \to y = z.$$

Čiastočné funkcie sú usporiadané množinovou reláciou $f \subseteq g$.

Silná rovnosť (Kleene)

$\tau \simeq \rho$ platí, ak jedna z nasledujúcich podmienok je splnená:

- Výrazy τ, ρ sú definované a ich hodnoty sú rovnaké.
- Výrazy τ, ρ nie sú definované.

Ak termy τ, ρ obsahujú len funkcie, potom $\tau \simeq \rho \leftrightarrow \tau = \rho$.
Označenie:

- $\tau\downarrow$, ak výraz τ je definovaný (má hodnotu, konverguje).
- $\tau\uparrow$, ak výraz τ nie je definovaný (nemá hodnotu, diverguje).

Zopakovanie

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Funkcionálna rovnica v neznámej f:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \ldots, x_n]$$

má najmenšie riešenie n-árnu čiastočnú funkciu $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$, ktorá je limitou reťazca $f_0, f_1, f_2, \ldots$ definovaného predpisom

$$f_0 = \emptyset^{(n)}$$
$$f_{i+1}(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f_i; x_1, \ldots, x_n].$$

Poznámka

Toto je prvá časť prvej vety o rekurzii. V druhej časti sa tvrdí, že najmenšie riešenie je vypočítateľné.

Zopakovanie

Rekurzívne definície čiastočných funkcií

Sú to definície čiastočných funkcií v tvare

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \dots, x_n].$$

Čiastočnou funkciou, ktorá je definovaná uvedeným vzťahom, rozumieme najmenšie riešenie tejto funkcionálnej rovnice v triede n-árnych čiastočných funkcií. Existencia takého riešenia plynie z prvej vety o rekurzii.

Poznámka

Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií

$$f(x_1, \dots, x_n) = \tau[f; x_1, \dots, x_n]$$

sú špeciálnym prípadom rekurzívnych definícií čiastočných funkcií.

Zopakovanie

Výpočtový model

- Výpočet prebieha na monadických numeráloch: $\underline{x} \equiv \overbrace{\mathsf{S}\ldots\mathsf{S}}^{x\text{-krát}}(0)$.
- Jeden krok výpočtu: $\rho \rhd_1 \sigma$. Vyberáme najľavejší redex:

$$\mathrm{D}(\underline{0}, \rho_2, \rho_3) \rhd_1 \rho_3 \qquad \mathrm{D}(\underline{x+1}, \rho_2, \rho_3) \rhd_1 \rho_2$$

$$g_i(\underline{y_1}, \ldots, \underline{y_{m_i}}) \rhd_1 \underline{g_i(y_1, \ldots, y_{m_i})} \qquad \text{pre } i = 1, \ldots, k$$

$$f(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}) \rhd_1 \tau[f; \underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}].$$

- Viac krokov výpočtu: $\rho \rhd \sigma$.

Veta (Ekvivalentnosť výpočtovej a definičnej sémantiky)

Platí

$$f(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}) \rhd \underline{y} \leftrightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \simeq y.$$

Čiastočne rekurzívne funkcie

Definícia triedy čiastočne rekurzívnych funkcií

- Základné funkcie:
  - funkcia nasledovníka $\mathrm{S}(x) = x + 1$,
  - funkcia predchodcu $\mathrm{P}(x) = x \dot{-} 1$.
- Explicitné definície čiastočných funkcií:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[x_1, \ldots, x_n].$$

- Rekurzívne definície čiastočných funkcií:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \ldots, x_n].$$

Funkcia je rekurzívna, ak je to totálna čiastočne rekurzívna funkcia. Predikát je rekurzívny, ak taká je jeho charakteristická funkcia.

Čiastočne rekurzívne funkcie

Rekurzívne odvodenia

Sčítanie

$$x + y \simeq \text{if } x \neq 0 \text{ then } \mathrm{S}\big(\mathrm{P}(x) + y\big) \text{ else } y.$$

Odčítanie

$$x \dot{-} y \simeq \text{if } x \neq 0 \text{ then if } y \neq 0 \text{ then } \mathrm{P}(x) \dot{-} \mathrm{P}(y) \text{ else } x \text{ else } 0.$$

Násobenie

$$x \cdot y \simeq \text{if } x \neq 0 \text{ then } \mathrm{P}(x) \cdot y + y \text{ else } 0.$$

Umocňovanie

$$x^y \simeq \text{if } y \neq 0 \text{ then } x \cdot x^{\mathrm{P}(y)} \text{ else } 1.$$

Výpočtový model pre čiastočne rekurzívne funkcie

Rekurzívne termy a funkčné symboly (príklad)

Primitívne rekurzívna definícia

$$\begin{aligned} 0 + y &= y \\ \mathrm{S}(x) + y &= \mathrm{S}(x + y). \end{aligned}$$

Regulárna rekurzívna definícia

$$x + y = \text{if } x \neq 0 \text{ then } \mathrm{S}\big(\mathrm{P}(x) + y\big) \text{ else } y.$$

Rekurzívna definícia so silnou rovnosťou

$$x_1 + x_2 \simeq \mathrm{D}\Big(x_1, \mathrm{S}\big(\mathrm{P}(x_1) + x_2\big), x_2\Big).$$

Rekurzívny funkčný symbol

$$\lambda_2.\mathrm{D}\Big(x_1, \mathrm{S}\,\mathfrak{f}_2\big(\mathrm{P}(x_1), x_2\big), x_2\Big).$$

Výpočtový model pre čiastočne rekurzívne funkcie

Rekurzívne termy a funkčné symboly

Induktívna definícia triedy rekurzívnych termov a triedy rekurzívnych funkčných symbolov:

- Premenné $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ a konštanta 0 sú rekurzívne termy.
- Ak τ_1, τ_2, τ_3 sú rekurzívne termy, potom aplikácia diskriminačnej funkcie $\mathrm{D}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ je rekurzívny term.
- Ak τ je rekurzívny term, potom aplikácie funkcie nasledovníka $\mathrm{S}(\tau)$ a funkcie predchodcu $\mathrm{P}(\tau)$ sú rekurzívne termy.
- Ak $\tau_1, \ldots, \tau_n$ sú rekurzívne termy, potom aplikácia n-árnej funkčnej premennej $\mathfrak{f}_n(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ je rekurzívny term.
- Ak $\rho_1, \ldots, \rho_n$ sú rekurzívne termy a τ je rekurzívny term v premenných $x_1, \ldots, x_n$ a funkčnej premennej $\mathfrak{f}_n$, potom aplikácia $(\lambda_n.\tau)(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ je rekurzívny term.

S, P a $\lambda_n.\tau$ sa nazývajú rekurzívne funkčné symboly.

Výpočtový model pre čiastočne rekurzívne funkcie

Interpretácia rekurzívnych termov a funkčných symbolov

Interpretáciu (denotáciu) definovaných rekurzívnych funkčných symbolov $\lambda_n.\tau$ definujeme indukciou na štruktúru rekurzívnych termov τ:

Nech $\tau[\mathfrak{f}_n; x_1, \ldots, x_n]$ *je rekurzívny term v premenných* $x_1, \ldots, x_n$ *a funkčnej premennej* $\mathfrak{f}_n$. *Predpokladajme ďalej, že rekurzívne funkčné symboly vyskytujúce sa vo výraze* τ *sú interpretované podľa induktívneho predpokladu. Potom rekurzívny funkčný symbol* $\lambda_n.\tau$ *interpretujeme ako čiastočnú funkciu* f *definovanú vzťahom*

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \ldots, x_n].$$

Interpretáciu rekurzívneho funkčného symbolu $\lambda_n.\tau$ označujeme tým istým menom $\lambda_n.\tau$.

Výpočtový model pre čiastočne rekurzívne funkcie

Veta

Čiastočná funkcia je rekurzívna práve vtedy, keď je interpretáciou nejakého rekurzívneho funkčného symbolu.

Dôkaz.

- Indukciou na dĺžku rekurzívneho odvodenia dokážeme, že každá čiastočne rekurzívna funkcia je interpretáciou nejakého rekurzívneho funkčného symbolu.
- Indukciou na štruktúru rekurzívneho termu τ dokážeme, že interpretácia rekurzívneho funkčného symbolu $\lambda_n.\tau$ je čiastočne rekurzívna funkcia.

Výpočtový model pre čiastočne rekurzívne funkcie

Monadické numerály

Výpočet prebieha na monadických numeráloch:

$$0 \quad \mathsf{S}(0) \quad \mathsf{S}\,\mathsf{S}(0) \quad \mathsf{S}\,\mathsf{S}\,\mathsf{S}(0) \quad \mathsf{S}\,\mathsf{S}\,\mathsf{S}\,\mathsf{S}(0) \quad \ldots .$$

Označenie:

- Ak x je prirodzené číslo, potom $\underline{x}$ je monadický numerál, ktorý denotuje číslo x:

$$\underline{x} \equiv \overbrace{\mathsf{S}\ldots\mathsf{S}}^{x\text{-krát}}(0).$$

- Ak $x_1, \ldots, x_n$ sú prirodzené čísla, potom

$$\underline{x_1, \ldots, x_n} \equiv \underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n} \equiv \overbrace{\mathsf{S}\ldots\mathsf{S}}^{x_1\text{-krát}}(0), \ldots, \overbrace{\mathsf{S}\ldots\mathsf{S}}^{x_n\text{-krát}}(0).$$

Výpočtový model pre čiastočne rekurzívne funkcie

Jeden krok výpočtu

Ak uzavretý rekurzívny term τ nie je numerál, tak musí obsahovať aspoň jeden podvýraz (*redex*) v tvare

$$\mathrm{D}(\underline{x}, \sigma_2, \sigma_3) \qquad \mathrm{P}(\underline{x}) \qquad (\lambda_n.\sigma)(\underline{\vec{x}}).$$

Jeden výpočtový krok spočíva v nájdení najľavejšieho redexu a jeho nahradením kontrakciou podľa nasledujúcich pravidiel

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}(\underline{0}, \sigma_2, \sigma_3) &\rhd_1 \sigma_3 \\
\mathrm{D}(\underline{x+1}, \sigma_2, \sigma_3) &\rhd_1 \sigma_2 \\
\mathrm{P}(\underline{x}) &\rhd_1 \underline{x \dot{-} 1} \\
(\lambda_n.\sigma[\mathfrak{f}_n; \vec{x}])(\underline{\vec{x}}) &\rhd_1 \sigma[\lambda_n.\sigma; \underline{\vec{x}}].
\end{aligned}$$

Tak dostaneme nový uzavretý rekurzívny term ρ a píšeme

$$\tau \rhd_1 \rho.$$

Výpočtový model pre čiastočne rekurzívne funkcie

Viac krokov výpočtu

Označenie:

- $\tau_1 \triangleright_k \tau_2$, ak výraz τ_1 sa redukuje do výrazu τ_2 po k krokoch. To znamená, že existujú uzavreté rekurzívne termy $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_k$ také, že

  $$\tau_1 \equiv \rho_0 \triangleright_1 \rho_1 \triangleright_1 \cdots \triangleright_1 \rho_k \equiv \tau_2.$$

  Umožníme tiež prípad $k = 0$. Vtedy $\tau_1 \triangleright_0 \tau_2 \leftrightarrow \tau_1 \equiv \tau_2$.
- $\tau_1 \triangleright \tau_2$, ak $\tau_1 \triangleright_k \tau_2$ pre nejaké k.
- Ak $\tau \triangleright \underline{x}$, tak vravíme, že výpočet skončil s výsledkom x.

Veta (Ekvivalentnosť definičnej a výpočtovej sémantiky)

Pre každý rekurzívny funkčný symbol f platí:

$$f(\vec{x}) \simeq y \leftrightarrow f(\underline{\vec{x}}) \triangleright \underline{y}.$$

Aritmetizácia výpočtového modelu

Aritmetizácia rekurzívnych termov a funkčných symbolov

Pomocou párových konštruktorov z rôznymi rozlišovacími položkami:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_i &= \langle 0, i \rangle && \text{(premenné)} \\
\boldsymbol{0} &= \langle 1, 0 \rangle && \text{(konštanta 0)} \\
\boldsymbol{D}(t_1, t_2, t_3) &= \langle 2, t_1, t_2, t_3 \rangle && \text{(podmienkový výraz)} \\
\boldsymbol{\langle} t, ts \boldsymbol{\rangle} &= \langle 3, t, ts \rangle && \text{(kontrakcia argumentov)} \\
e\boldsymbol{(}ts\boldsymbol{)} &= \langle 4, e, ts \rangle && \text{(aplikácia funkcie)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{S} &= \langle 5, 0 \rangle && \text{(funkcia nasledovníka)} \\
\boldsymbol{P} &= \langle 6, 0 \rangle && \text{(funcia predchodcu)} \\
\boldsymbol{f}_n &= \langle 7, n \rangle && \text{(funkčná premenná)} \\
\boldsymbol{\lambda}_n\boldsymbol{.}\, t &= \langle 8, n, t \rangle. && \text{(definovaná funkcia)}
\end{aligned}
$$

Výpočtový model pre čiastočne rekurzívne funkcie

Rekurzívne termy a funkčné symboly

Induktívna definícia triedy rekurzívnych termov a triedy rekurzívnych funkčných symbolov:

- Premenné $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ a konštanta 0 sú rekurzívne termy.
- Ak τ_1, τ_2, τ_3 sú rekurzívne termy, potom aplikácia diskriminačnej funkcie $\mathsf{D}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ je rekurzívny term.
- Ak τ je rekurzívny term, potom aplikácie funkcie nasledovníka $\mathsf{S}(\tau)$ a funkcie predchodcu $\mathsf{P}(\tau)$ sú rekurzívne termy.
- Ak $\tau_1, \ldots, \tau_n$ sú rekurzívne termy, potom aplikácia n-árnej funkčnej premennej $\mathfrak{f}_n(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ je rekurzívny term.
- Ak $\rho_1, \ldots, \rho_n$ sú rekurzívne termy a τ je rekurzívny term v premenných $x_1, \ldots, x_n$ a funkčnej premennej $\mathfrak{f}_n$, potom aplikácia $(\lambda_n.\tau)(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ je rekurzívny term.

S, P a $\lambda_n.\tau$ sa nazývajú rekurzívne funkčné symboly.

Aritmetizácia výpočtového modelu

Aritmetizácia rekurzívnych termov a funkčných symbolov

Pomocou párových konštruktorov z rôznymi rozlišovacími položkami:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_i &= \langle 0, i \rangle && \text{(premenné)} \\
\boldsymbol{0} &= \langle 1, 0 \rangle && \text{(konštanta 0)} \\
\boldsymbol{D}(t_1, t_2, t_3) &= \langle 2, t_1, t_2, t_3 \rangle && \text{(podmienkový výraz)} \\
\boldsymbol{\langle} t, ts \boldsymbol{\rangle} &= \langle 3, t, ts \rangle && \text{(kontrakcia argumentov)} \\
e\boldsymbol{(}ts\boldsymbol{)} &= \langle 4, e, ts \rangle && \text{(aplikácia funkcie)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{S} &= \langle 5, 0 \rangle && \text{(funkcia nasledovníka)} \\
\boldsymbol{P} &= \langle 6, 0 \rangle && \text{(funcia predchodcu)} \\
\boldsymbol{f}_n &= \langle 7, n \rangle && \text{(funkčná premenná)} \\
\boldsymbol{\lambda}_n\boldsymbol{.}\, t &= \langle 8, n, t \rangle. && \text{(definovaná funkcia)}
\end{aligned}
$$

Aritmetizácia výpočtového modelu

Kontrakcia argumentov

- Notačná konvencia pre kontrakčnú funkciu:

$$\langle t_1, t_2, ts\rangle \equiv \langle t_1, \langle t_2, ts\rangle\rangle.$$

- Kontrakciou n-tice argumentov $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{N}^n$ rozumieme číslo

$$\langle t_1, t_2, \ldots, t_n\rangle \in \mathrm{N}.$$

- Projekčná funkcia $[ts]_i^n$ operuje na kontrakciach argumentov

$$[\langle t_1, t_2, \ldots, t_n\rangle]_i^n = t_i \qquad \text{pre } 1 \leq i \leq n.$$

Je to primitívne rekurzívna funkcia.

Aritmetizácia výpočtového modelu

Aritmetizácia rekurzívnych termov a funkčných symbolov

Pomocou párových konštruktorov z rôznymi rozlišovacími položkami:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_i &= \langle 0, i\rangle && \text{(premenné)}\\
\boldsymbol{0} &= \langle 1, 0\rangle && \text{(konštanta 0)}\\
\boldsymbol{D}(t_1, t_2, t_3) &= \langle 2, t_1, t_2, t_3\rangle && \text{(podmienkový výraz)}\\
\boldsymbol{\langle} t, ts \boldsymbol{\rangle} &= \langle 3, t, ts\rangle && \text{(kontrakcia argumentov)}\\
e\boldsymbol{(}ts\boldsymbol{)} &= \langle 4, e, ts\rangle && \text{(aplikácia funkcie)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{S} &= \langle 5, 0\rangle && \text{(funkcia nasledovníka)}\\
\boldsymbol{P} &= \langle 6, 0\rangle && \text{(funcia predchodcu)}\\
\boldsymbol{f}_n &= \langle 7, n\rangle && \text{(funkčná premenná)}\\
\boldsymbol{\lambda}_n\boldsymbol{.}\, t &= \langle 8, n, t\rangle. && \text{(definovaná funkcia)}
\end{aligned}
$$

Aritmetizácia výpočtového modelu

Aritmetizácia rekurzívnych termov a funkčných symbolov

Číslo $\ulcorner\tau\urcorner$ resp. $\ulcorner f\urcorner$ je kódom termu τ resp. funkčného symbolu f:

$$\begin{aligned}
\ulcorner x_i \urcorner &= \boldsymbol{x}_i \\
\ulcorner 0 \urcorner &= \boldsymbol{0} \\
\ulcorner \mathrm{D}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \urcorner &= \boldsymbol{D}(\ulcorner\tau_1\urcorner, \ulcorner\tau_2\urcorner, \ulcorner\tau_3\urcorner) \\
\ulcorner f(\tau_1, \dots, \tau_n) \urcorner &= \ulcorner f \urcorner \boldsymbol{(}\langle \ulcorner\tau_1\urcorner \boldsymbol{,} \dots \boldsymbol{,} \ulcorner\tau_n\urcorner \rangle \boldsymbol{)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ulcorner \mathrm{S} \urcorner &= \boldsymbol{S} \\
\ulcorner \mathrm{P} \urcorner &= \boldsymbol{P} \\
\ulcorner \mathfrak{f}_n \urcorner &= \boldsymbol{f}_n \\
\ulcorner \lambda_n.\tau \urcorner &= \boldsymbol{\lambda}_n \boldsymbol{.} \ulcorner\tau\urcorner.
\end{aligned}$$

Aritmetizácia výpočtového modelu

Aritmetizácia rekurzívnych termov a funkčných symbolov

Číslo $\ulcorner\tau\urcorner$ resp. $\ulcorner f\urcorner$ je kódom termu τ resp. funkčného symbolu f:

$$\begin{aligned}
\ulcorner x_i \urcorner &= \boldsymbol{x}_i \\
\ulcorner 0 \urcorner &= \boldsymbol{0} \\
\ulcorner \mathrm{D}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \urcorner &= \boldsymbol{D}(\ulcorner\tau_1\urcorner, \ulcorner\tau_2\urcorner, \ulcorner\tau_3\urcorner) \\
\ulcorner f(\tau_1, \ldots, \tau_n) \urcorner &= \ulcorner f \urcorner \boldsymbol{(}\langle \ulcorner\tau_1\urcorner \boldsymbol{,} \ldots \boldsymbol{,} \ulcorner\tau_n\urcorner \rangle\boldsymbol{)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ulcorner \mathrm{S} \urcorner &= \boldsymbol{S} \\
\ulcorner \mathrm{P} \urcorner &= \boldsymbol{P} \\
\ulcorner \mathfrak{f}_n \urcorner &= \boldsymbol{f}_n \\
\ulcorner \lambda_n . \tau \urcorner &= \boldsymbol{\lambda}_n \boldsymbol{.} \ulcorner\tau\urcorner .
\end{aligned}$$

Aritmetizácia výpočtového modelu

Príklad

Regulárna rekurzívna definícia

$$x + y = \text{if } x \neq 0 \text{ then } \mathrm{S}\big(\mathrm{P}(x) + y\big) \text{ else } y.$$

Rekurzívna definícia so silnou rovnosťou

$$x_1 + x_2 \simeq \mathrm{D}\big(x_1, \mathrm{S}\big(\mathrm{P}(x_1) + x_2\big), x_2\big).$$

Rekurzívny funkčný symbol

$$\lambda_2.\mathrm{D}\Big(x_1, \mathrm{S}\,\mathfrak{f}_2\big(\mathrm{P}(x_1), x_2\big), x_2\Big)$$

a jeho aritmetizácia

$$\boldsymbol{\lambda}_2.\,\boldsymbol{D}\Big(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{S}\Big(\boldsymbol{f}_2(\langle \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}_1), \boldsymbol{x}_2\rangle)\Big), \boldsymbol{x}_2\Big).$$

Aritmetizácia výpočtového modelu

Monadické numerály, časť prvá

Unárna operácia $\ulcorner \underline{x} \urcorner$ vytvorí kód numerálu $\underline{x} \equiv \overbrace{\mathsf{S} \ldots \mathsf{S}}^{x\text{-krát}}(0)$:

$$\ulcorner \underline{x} \urcorner = \ulcorner \overbrace{\mathsf{S} \ldots \mathsf{S}}^{x\text{-krát}}(0) \urcorner.$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie $\ulcorner \underline{x} \urcorner$ plynie z tohoto vyjadrenia

$$\ulcorner \underline{0} \urcorner = \boldsymbol{0} \qquad\qquad \ulcorner \underline{x+1} \urcorner = \boldsymbol{S}(\ulcorner \underline{x} \urcorner).$$

Jej inverzia je funkcia $Dc(t)$, ktorá dekóduje kód numerálu:

$$Dc(\ulcorner \underline{x} \urcorner) = x.$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie $Dc(t)$ plynie z tohoto vyjadrenia

$$Dc(\boldsymbol{0}) = 0 \qquad\qquad Dc\,\boldsymbol{S}(t) = Dc(t) + 1.$$

Výpočtový model pre čiastočne rekurzívne funkcie

Monadické numerály

Výpočet prebieha na monadických numeráloch:

$$0 \quad \mathsf{S}(0) \quad \mathsf{S}\,\mathsf{S}(0) \quad \mathsf{S}\,\mathsf{S}\,\mathsf{S}(0) \quad \mathsf{S}\,\mathsf{S}\,\mathsf{S}\,\mathsf{S}(0) \quad \ldots .$$

Označenie:

- Ak x je prirodzené číslo, potom $\underline{x}$ je monadický numerál, ktorý denotuje číslo x:

$$\underline{x} \equiv \overbrace{\mathsf{S}\ldots\mathsf{S}}^{x\text{-krát}}(0).$$

- Ak $x_1, \ldots, x_n$ sú prirodzené čísla, potom

$$\underline{x_1, \ldots, x_n} \equiv \underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n} \equiv \overbrace{\mathsf{S}\ldots\mathsf{S}}^{x_1\text{-krát}}(0), \ldots, \overbrace{\mathsf{S}\ldots\mathsf{S}}^{x_n\text{-krát}}(0).$$

Aritmetizácia výpočtového modelu

Monadické numerály, časť druhá

Predikát $Nm(t)$ platí, ak číslo t je kódom nejakého numerálu:

$$Nm(t) \leftrightarrow \exists x\, t = \ulcorner \underline{x} \urcorner.$$

Jej charakteristická funkcia $Nm_*(t)$ je primitívne rekurzívna:

$$\begin{aligned}
&Nm_*(\boldsymbol{0}) = 1\\
&Nm_*\, \boldsymbol{S(}t\boldsymbol{)} = 1 \leftarrow Nm(t) = 1\\
&Nm_*\, \boldsymbol{S(}t\boldsymbol{)} = 0 \leftarrow Nm(t) \neq 1\\
&Nm_*(t) = 0 \leftarrow \neg\big(t = \boldsymbol{0} \lor \exists t_1\; t = \boldsymbol{S(}t_1\boldsymbol{)}\big).
\end{aligned}$$

Predikátová forma uvedenej definície

$$\begin{aligned}
&Nm(\boldsymbol{0})\\
&Nm\, \boldsymbol{S(}t\boldsymbol{)} \leftarrow Nm(t).
\end{aligned}$$

Výpočtový model pre čiastočne rekurzívne funkcie

Monadické numerály

Výpočet prebieha na monadických numeráloch:

$$0 \quad \mathsf{S}(0) \quad \mathsf{S}\,\mathsf{S}(0) \quad \mathsf{S}\,\mathsf{S}\,\mathsf{S}(0) \quad \mathsf{S}\,\mathsf{S}\,\mathsf{S}\,\mathsf{S}(0) \quad \ldots .$$

Označenie:

- Ak x je prirodzené číslo, potom $\underline{x}$ je monadický numerál, ktorý denotuje číslo x:

$$\underline{x} \equiv \overbrace{\mathsf{S} \ldots \mathsf{S}}^{x\text{-krát}}(0).$$

- Ak $x_1, \ldots, x_n$ sú prirodzené čísla, potom

$$\underline{x_1, \ldots, x_n} \equiv \underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n} \equiv \overbrace{\mathsf{S} \ldots \mathsf{S}}^{x_1\text{-krát}}(0), \ldots, \overbrace{\mathsf{S} \ldots \mathsf{S}}^{x_n\text{-krát}}(0).$$

Aritmetizácia výpočtového modelu

Pomocné operácie

Špecifikácia:

$$Pn(\ulcorner \underline{x} \urcorner) = \ulcorner \underline{x \dot{-} 1} \urcorner$$
$$Dn(\ulcorner \underline{x} \urcorner, t_2, t_3) = \mathrm{D}(x, t_2, t_3).$$

Primitívna rekurzívnosť oboch funkcií plynie z tohoto vyjadrenia

$$Pn(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0} \qquad Dn(\boldsymbol{0}, t_2, t_3) = t_3$$
$$Pn\,\boldsymbol{S(}t\boldsymbol{)} = t \qquad Dn\big(\boldsymbol{S(}t_1\boldsymbol{)}, t_2, t_3\big) = t_2.$$

Pomocný primitívny rekurzívny predikát

$$Nms(n, ts) \leftrightarrow \forall i \big(1 \le i \le n \rightarrow Nm([ts]_i^n)\big).$$

Výpočtový model pre čiastočne rekurzívne funkcie

Jeden krok výpočtu

Ak uzavretý rekurzívny term τ nie je numerál, tak musí obsahovať aspoň jeden podvýraz (*redex*) v tvare

$$\mathrm{D}(\underline{x}, \sigma_2, \sigma_3) \qquad \mathrm{P}(\underline{x}) \qquad (\lambda_n.\sigma)(\vec{\underline{x}}).$$

Jeden výpočtový krok spočíva v nájdení najľavejšieho redexu a jeho nahradením kontrakciou podľa nasledujúcich pravidiel

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}(\underline{0}, \sigma_2, \sigma_3) &\rhd_1 \sigma_3 \\
\mathrm{D}(\underline{x+1}, \sigma_2, \sigma_3) &\rhd_1 \sigma_2 \\
\mathrm{P}(\underline{x}) &\rhd_1 \underline{x \dot{-} 1} \\
(\lambda_n.\sigma[\mathfrak{f}_n; \vec{x}])(\vec{\underline{x}}) &\rhd_1 \sigma[\lambda_n.\sigma; \vec{\underline{x}}].
\end{aligned}$$

Tak dostaneme nový uzavretý rekurzívny term ρ a píšeme

$$\tau \rhd_1 \rho.$$

Aritmetizácia výpočtového modelu

Substitúcia

Ternárna funkcia $t[e; rs]$ je aritmetizácia operácie substitúcie $\tau[\lambda_n.\sigma; \underline{\vec{x}}]$ nad rekurzívnymi termami:

$$\ulcorner\tau\urcorner[\ulcorner\lambda_n.\sigma\urcorner; \langle\ulcorner\underline{x_1}\urcorner, \dots, \ulcorner\underline{x_n}\urcorner\rangle] = \ulcorner\tau[\lambda_n.\sigma; \underline{x_1}, \dots, \underline{x_n}]\urcorner.$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie $t[e; rs]$ plynie z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_i[e; rs] &= [rs]_i^{Ar(e)} \\
\boldsymbol{0}[e; rs] &= \boldsymbol{0} \\
\boldsymbol{D}(t_1, t_2, t_3)[e; rs] &= \boldsymbol{D}(t_1[e; rs], t_2[e; rs], t_3[e; rs]) \\
\langle t, ts\rangle[e; rs] &= \langle t[e; rs], ts[e; rs]\rangle \\
\boldsymbol{f}_n\boldsymbol{(}ts\boldsymbol{)}[e; rs] &= e\boldsymbol{(}ts[e; rs]\boldsymbol{)} \\
f\boldsymbol{(}ts\boldsymbol{)}[e; rs] &= f\boldsymbol{(}ts[e; rs]\boldsymbol{)} \leftarrow \neg\exists n\, f = \boldsymbol{f}_n.
\end{aligned}$$

Tu $Ar(e)$ je primitívne rekurzívna funkcia taká, že $Ar(\ulcorner f\urcorner) = n$ pre n-árny definovaný rekurzívny funkčný symbol f.

Výpočtový model pre čiastočne rekurzívne funkcie

Jeden krok výpočtu

Ak uzavretý rekurzívny term τ nie je numerál, tak musí obsahovať aspoň jeden podvýraz (*redex*) v tvare

$$\mathrm{D}(\underline{x}, \sigma_2, \sigma_3) \qquad \mathrm{P}(\underline{x}) \qquad (\lambda_n.\sigma)(\vec{\underline{x}}).$$

Jeden výpočtový krok spočíva v nájdení najľavejšieho redexu a jeho nahradením kontrakciou podľa nasledujúcich pravidiel

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}(\underline{0}, \sigma_2, \sigma_3) &\rhd_1 \sigma_3 \\
\mathrm{D}(\underline{x+1}, \sigma_2, \sigma_3) &\rhd_1 \sigma_2 \\
\mathrm{P}(\underline{x}) &\rhd_1 \underline{x \dot{-} 1} \\
(\lambda_n.\sigma[\mathfrak{f}_n; \vec{x}])(\vec{\underline{x}}) &\rhd_1 \sigma[\lambda_n.\sigma; \vec{\underline{x}}].
\end{aligned}$$

Tak dostaneme nový uzavretý rekurzívny term ρ a píšeme

$$\tau \rhd_1 \rho.$$

Aritmetizácia výpočtového modelu

Jeden krok výpočtu

Špecifikácia redukčnej funkcie $Rd(t)$:

$$\text{ak } \tau \rhd_1 \rho, \text{ potom } Rd(\ulcorner \tau \urcorner) = \ulcorner \rho \urcorner \qquad Rd(\ulcorner \underline{x} \urcorner) = \ulcorner \underline{x} \urcorner.$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie plynie z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned}
Rd(\boldsymbol{0}) &= \boldsymbol{0} \\
Rd\, \boldsymbol{D}(t_1, t_2, t_3) &= Dn(t_1, t_2, t_3) \leftarrow Nm(t_1) \\
Rd\, \boldsymbol{D}(t_1, t_2, t_3) &= \boldsymbol{D}(Rd(t_1), t_2, t_3) \leftarrow \neg Nm(t_1) \\
Rd\langle t, ts \rangle &= \langle t, Rd(ts) \rangle \leftarrow Nm(t) \\
Rd\langle t, ts \rangle &= \langle Rd(t), ts \rangle \leftarrow \neg Nm(t) \\
Rd\, \boldsymbol{S}(t) &= \boldsymbol{S}(Rd(t)) \\
Rd\, \boldsymbol{P}(t) &= Pn(t) \leftarrow Nm(t) \\
Rd\, \boldsymbol{P}(t) &= \boldsymbol{P}(Rd(t)) \leftarrow \neg Nm(t) \\
Rd\, (\boldsymbol{\lambda}_n.\, t)(ts) &= t[\boldsymbol{\lambda}_n.\, t; ts] \leftarrow Nms(n, ts) \\
Rd\, (\boldsymbol{\lambda}_n.\, t)(ts) &= (\boldsymbol{\lambda}_n.\, t)(Rd(ts)) \leftarrow \neg Nms(n, ts).
\end{aligned}$$

Výpočtový model pre čiastočne rekurzívne funkcie

Jeden krok výpočtu

Ak uzavretý rekurzívny term τ nie je numerál, tak musí obsahovať aspoň jeden podvýraz (*redex*) v tvare

$$\mathrm{D}(\underline{x}, \sigma_2, \sigma_3) \qquad \mathrm{P}(\underline{x}) \qquad (\lambda_n.\sigma)(\vec{\underline{x}}).$$

Jeden výpočtový krok spočíva v nájdení najľavejšieho redexu a jeho nahradením kontrakciou podľa nasledujúcich pravidiel

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(\underline{0}, \sigma_2, \sigma_3) &\rhd_1 \sigma_3 \\ \mathrm{D}(\underline{x+1}, \sigma_2, \sigma_3) &\rhd_1 \sigma_2 \\ \mathrm{P}(\underline{x}) &\rhd_1 \underline{x \dot{-} 1} \\ (\lambda_n.\sigma[\mathfrak{f}_n; \vec{x}])(\vec{\underline{x}}) &\rhd_1 \sigma[\lambda_n.\sigma; \vec{\underline{x}}]. \end{aligned}$$

Tak dostaneme nový uzavretý rekurzívny term ρ a píšeme

$$\tau \rhd_1 \rho.$$

Záver

8. cvičenie (test)

- Výsledky s komentárom nájdete v MS Teams.

9. cvičenie

- Začína hneď po prednáške.
- Úlohy odovzdať do MOODLE najneskôr do 18:00 v sobotu budúci týždeň.

10. prednáška

- Kleeneho veta o normálnej forme.
- Enumerácia čiastočne rekurzívnych funkcií.
- Čiastočne μ-rekurzívne funkcie.
- Church-Turingova téza.

Koniec prednášky