2-AIN-266 Deklaratívne programovanie

Letný semester 2021/22

8. prednáška

Ján Komara

Obsah 8. prednášky

Distančná výučba

Pokyny

- Vypnite si kameru a stlmte si mikrofón.
- Komunikovať je možné počas celej prednášky.
- Ak máte otázku alebo chcete niečo povedať, tak zdvihnite ruku.
- Po vyzvaní zapnite si mikrofón.
- Po skončení ruku zložte a stlmte si mikrofón.
- Prezentácia je nahrávaná.
- Nahrávku z prednášky nájdete v tejto sekcii.
- Slajdy z prednášky nájdete pod položkou Súbory/Files.

Zopakovanie

Cieľ predmetu

- Vybudovať matematické základy deklaratívnych programovacích jazykov.

Stručná osnova predmetu

- Primitívne rekurzívne funkcie
  - Aritmetizácia dátových štruktúr.
  - Regulárne rekurzívne definície s mierou.
- Obecne rekurzívne funkcie
  - Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií:
    - Ackermannova funkcia (1928),
    - univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie.
- Čiastočne rekurzívne funkcie
  - Kleeneho prvá veta o rekurzii (veta o pevnom bode).
  - Kleeneho veta o normálnej forme.
  - Churchova téza a algoritmicky nerozhodnuteľné problémy.

Zopakovanie

Obecne rekurzívne funkcie

- Základné funkcie:
  - funkcia nasledovníka $S(x) = x + 1$,
  - funkcia predchodcu $x \dot{-} 1$.
- Explicitné definície:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tau[x_1, \ldots, x_n].$$

- Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tau[f; x_1, \ldots, x_n].$$

Obecne rekurzívne funkcie, ktoré nie sú primitívne rekurzívne

- Ackermannova funkcia.
- Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie.

Zopakovanie

μ-Rekurzívne funkcie

- Základné funkcie:
  - konštantná funkcia $Z(x) = 0$,
  - funkcia nasledovníka $S(x) = x + 1$,
  - identity (projekcie) $I_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ pre každé $1 \leq i \leq n$.
- Kompozícia (skladanie) funkcií:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = h\big(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)\big).$$

- Primitívna rekurzia:

$$\begin{aligned} f(0, y_1, \ldots, y_n) &= g(y_1, \ldots, y_n) \\ f\big(S(x), y_1, \ldots, y_n\big) &= h\big(x, f(x, y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n\big). \end{aligned}$$

- Regulárna minimalizácia:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y[g(y, x_1, \ldots, x_n) = 1].$$

Zopakovanie

Veta

Trieda obecne rekurzívnych funkcií je totožná s triedou μ-rekurzívnych funkcií.

Churchova téza (1936)

Trieda intuitívne vypočítateľných funkcií nad oborom prirodzených čísel je totožná s triedou obecne rekurzívnych funkcií.

Modely vypočítateľných funkcií (do roku 1935)

- obecne rekurzívne funkcie [Herbrand-Gödel, 1931, 1934],
- λ-definovateľné funkcie [Church, 1932],
- μ-rekurzívne funkcie [Kleene, 1935, 1952].

Úvod

$$f(x) = f(x) + 1$$

$$f(x) = f(x)$$

$$f(x) = 0 \cdot f(x)$$

Úvod

$$f(x) = f(x) + 1$$

$$f(x) = f(x)$$

$$f(x) = 0 \cdot f(x)$$

Úvod

$$f(x) = f(x) + 1$$

$$f(x) = f(x)$$

$$f(x) = 0 \cdot f(x)$$

Úvod

$$f(x) = f(x) + 1$$

$$f(x) = f(x)$$

$$f(x) = 0 \cdot f(x)$$

Úvod

$$f(x) = f(x) + 1$$

$$f(x) = f(x)$$

$$f(x) = 0 \cdot f(x)$$

Úvod

$$f(x) = f(x) + 1$$

$$f(x) = f(x)$$

$$f(x) = 0 \cdot f(x)$$

Úvod

$$f(x) = f(x) + 1$$

$$f(x) = f(x)$$

$$f(x) = 0 \cdot f(x)$$

Úvod

$$f(x) = f(x) + 1$$

$$f(x) = f(x)$$

$$f(x) = 0 \cdot f(x)$$

Úvod

$$f(x) = f(x) + 1$$

$$f(x) = f(x)$$

$$f(x) = 0 \cdot f(x)$$

Úvod

$$f(x) = f(x) + 1$$

$$f(x) = f(x)$$

$$f(x) = 0 \cdot f(x)$$

Čiastočné funkcie

Čiastočné funkcie

n-árna čiastočná funkcia f je jednoznačná relácia z N^n do N:

$$(\vec{x}, y) \in f \wedge (\vec{x}, z) \in f \rightarrow y = z.$$

Definičný obor čiastočnej funkcie f:

$$\mathrm{dom}\, f = \{\vec{x} \in \mathrm{N}^n \mid \exists y\, (\vec{x}, y) \in f\}.$$

Čiastočná funkcia f je totálna, ak $\mathrm{dom}\, f = \mathrm{N}^n$, t.j.

$$\forall \vec{x} \exists y (\vec{x}, y) \in f.$$

Pre každé $n \geq 1$, symbolom $\emptyset^{(n)}$ označujeme n-árnu čiastočnú funkciu, ktorá nie je nikde definovaná.

Čiastočné funkcie

Usporiadanie čiastočných funkcií

Trieda n-árnych čiastočných funkcií je usporiadaná reláciou inklúzie:

$$f \subseteq g \leftrightarrow \forall \vec{x} \forall y \big((\vec{x}, y) \in f \rightarrow (\vec{x}, y) \in g \big).$$

Základné pojmy:

- f je rozšírením g, ak $g \subseteq f$.
- f je zúžením g, ak $f \subseteq g$.
- Rozšírenie f, ktoré je totálne, nazveme zúplnením čiastočnej funkcie f.

Niektoré základné vzťahy:

- $\emptyset^{(n)} \subseteq f$ pre každú čiastočnú n-árnu funkciu f.
- Ak $f \subseteq g$ a f je totálna, potom $f = g$.

Čiastočné funkcie

Reťazec

Nekonečná postupnosť n-árnych čiastočných funkcií

$$f_0, f_1, f_2, \dots, f_i, f_{i+1}, \dots$$

je reťazec, ak platí

$$f_0 \subseteq f_1 \subseteq f_2 \subseteq \cdots \subseteq f_i \subseteq f_{i+1} \subseteq \cdots .$$

Množinové zjednotenie $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$:

$$(\vec{x}, y) \in \bigcup_{i=0}^{\infty} f_i \leftrightarrow \exists i \, (\vec{x}, y) \in f_i,$$

je jeho limita (supremum). Je to opäť n-árna čiastočná funkcia.

Čiastočné funkcie

Čiastočná denotácia termov

Tvrdenie $\tau \simeq y$, ktoré čítame takto

hodnota výrazu τ existuje a je rovná číslu y,

je definované induktívne na štruktúru termu τ:

$$x \simeq y \equiv x = y$$

$$f(\rho_1, \ldots, \rho_n) \simeq y \equiv \exists z_1 \cdots \exists z_n \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} \rho_i \simeq z_i \land (z_1, \ldots, z_n, y) \in f \Big)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \simeq y \equiv \exists z_1 \big(\rho_1 \simeq z_1 \land (z_1 \neq 0 \land \rho_2 \simeq y \lor \\ z_1 = 0 \land \rho_3 \simeq y) \big). \end{aligned}$$

Ak hodnota termu existuje, potom je určená jednoznačne:

$$\tau \simeq y \land \tau \simeq z \to y = z.$$

Ak τ obsahuje len funkcie, potom $\tau \simeq y \leftrightarrow \tau = y$.

Čiastočné funkcie

Silná rovnosť (Kleene)

Označenie:

$$\begin{array}{ll} \tau{\downarrow} \equiv \exists y\, \tau \simeq y & (\tau \text{ je definovaný, má hodnotu, konverguje}) \\ \tau{\uparrow} \equiv \neg\exists y\, \tau \simeq y & (\tau \text{ nie je definovaný, nemá hodnotu, diverguje}). \end{array}$$

Silná rovnosť $\tau \simeq \rho$ je definovaná predpisom

$$\tau \simeq \rho \equiv \exists y \exists z (\tau \simeq y \wedge \rho \simeq z \wedge y = z) \vee \tau{\uparrow} \wedge \rho{\uparrow}.$$

Platí

$$\tau \simeq \rho \leftrightarrow \forall y (\tau \simeq y \leftrightarrow \rho \simeq y)$$
$$\tau \simeq \tau \qquad\qquad \tau \simeq \rho \to \rho \simeq \tau$$
$$\tau \simeq \rho \wedge \rho \simeq \sigma \to \tau \simeq \sigma.$$

Ak termy τ, ρ obsahujú len funkcie, potom $\tau \simeq \rho \leftrightarrow \tau = \rho$.

Čiastočné funkcie

Explicitné definície čiastočných funkcií

Sú to definície čiastočných funkcií v tvare

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[x_1, \ldots, x_n].$$

Funkcionálna rovnica má jediné riešenie. Je to n-árna čiastočná funkcia f definovaná vzťahom

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \forall y \big(f(x_1, \ldots, x_n) \simeq y \leftrightarrow \tau[x_1, \ldots, x_n] \simeq y \big).$$

Explicitné definície (totálnych) funkcií

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tau[x_1, \ldots, x_n]$$

sú špeciálnym prípadom explicitných definícií čiastočných funkcií.

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Veta

Funkcionálna rovnica v neznámej f:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \ldots, x_n]$$

má najmenšie riešenie n-árnu čiastočnú funkciu $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$, ktorá je limitou reťazca $f_0, f_1, f_2, \ldots$ definovaného predpisom

$$f_0 = \emptyset^{(n)}$$
$$f_{i+1}(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f_i; x_1, \ldots, x_n].$$

Poznámka

Toto je prvá časť originálnej Kleeneho prvej vety o rekurzii. V druhej časti sa tvrdí, že najmenšie riešenie je vypočítateľné.

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Príklad

$$f(n) \simeq \mathrm{D}(n, n \times f(n-1), 1)$$

$$f_0 = \emptyset^{(1)} \qquad\qquad f_{i+1}(n) \simeq \mathrm{D}(n, n \times f_i(n-1), 1)$$

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Príklad

$$f(n) \simeq \mathrm{D}(n, n \times f(n-1), 1)$$

$$f_0 = \emptyset^{(1)} \qquad f_{i+1}(n) \simeq \mathrm{D}(n, n \times f_i(n-1), 1)$$

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Príklad

$$f(n) \simeq \mathrm{D}(n, n \times f(n-1), 1)$$

$$f_0 = \emptyset^{(1)} \qquad\qquad f_{i+1}(n) \simeq \mathrm{D}(n, n \times f_i(n-1), 1)$$

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Veta

Funkcionálna rovnica v neznámej f:

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \dots, x_n]$$

má najmenšie riešenie n-árnu čiastočnú funkciu $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$, ktorá je limitou reťazca $f_0, f_1, f_2, \dots$ definovaného predpisom

$$f_0 = \emptyset^{(n)}$$
$$f_{i+1}(x_1, \dots, x_n) \simeq \tau[f_i; x_1, \dots, x_n].$$

Poznámka

Toto je prvá časť originálnej Kleeneho prvej vety o rekurzii. V druhej časti sa tvrdí, že najmenšie riešenie je vypočítateľné.

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Funkcionálna notácia

Symbolom $\tau[f]$ označme n-árnu čiastočnú funkciu definovanú predpisom:

$$\tau[f](x_1,\dots,x_n) \simeq \tau[f;x_1,\dots,x_n].$$

Kleeneho prvá veta o rekurzii charakterizuje pevné body funkcionálu $\lambda f.\tau[f]$.

Veta o pevnom bode

Funkcionálna rovnica v neznámej f:

$$f = \tau[f]$$

má najmenšie riešenie n-árnu čiastočnú funkciu $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$, ktorá je limitou reťazca $f_0, f_1, f_2, \dots$ definovaného predpisom

$$f_0 = \emptyset^{(n)} \qquad\qquad f_{i+1} = \tau[f_i].$$

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Lema (Monotónnosť)

Pre ľubovolné n-árne čiastočné funkcie f a g platí

$$f \subseteq g \to \tau[f] \subseteq \tau[g].$$

Dôkaz

Indukciou na štruktúru termu τ.

Dôsledok

Ak postupnosť n-árnych čiastočných funkcií

$$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_i, \ldots$$

je reťazec, potom aj táto postupnosť n-árnych čiastočných funkcií

$$\tau[f_0], \tau[f_1], \tau[f_2], \ldots, \tau[f_i], \ldots$$

je reťazec.

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Lema (Monotónnosť)

Pre ľubovolné n-árne čiastočné funkcie f a g platí

$$\forall \vec{x} \forall y \big(f(\vec{x}) \simeq y \rightarrow g(\vec{x}) \simeq y\big) \rightarrow \forall \vec{x} \forall y \big(\tau[f;\vec{x}] \simeq y \rightarrow \tau[g;\vec{x}] \simeq y\big).$$

Dôkaz

Indukciou na štruktúru termu τ.

Dôsledok

Ak postupnosť n-árnych čiastočných funkcií

$$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_i, \ldots$$

je reťazec, potom aj táto postupnosť n-árnych čiastočných funkcií

$$\tau[f_0], \tau[f_1], \tau[f_2], \ldots, \tau[f_i], \ldots$$

je reťazec.

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Lema (Spojitosť)

Pre ľubovolný reťazec n-árnych čiastočných funkcií

$$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_i, \ldots$$

platí vzťah

$$\tau[\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i] = \bigcup_{i=0}^{\infty} \tau[f_i].$$

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Lema (Spojitosť)

Pre ľubovolný reťazec n-árnych čiastočných funkcií

$$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_i, \ldots$$

platí vzťah

$$\forall \vec{x} \forall y \big(\tau[\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i; \vec{x}] \simeq y \leftrightarrow \exists i\, \tau[f_i; \vec{x}] \simeq y\big).$$

Dôkaz

Implikácia ($\leftarrow$) je priamočiary dôsledok monotónosti. Opačná implikácia sa dokazuje indukciou na štruktúru termu τ.

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Lema (Spojitosť)

Pre ľubovolný reťazec n-árnych čiastočných funkcií

$$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_i, \ldots$$

platí vzťah

$$\forall \vec{x} \forall y \big(\tau[\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i; \vec{x}] \simeq y \leftrightarrow \exists i\, \tau[f_i; \vec{x}] \simeq y \big).$$

Dôkaz

Implikácia ($\leftarrow$) je priamočiary dôsledok monotónosti. Opačná implikácia sa dokazuje indukciou na štruktúru termu τ.

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Lema (Spojitosť)

Pre ľubovolný reťazec n-árnych čiastočných funkcií

$$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_i, \ldots$$

platí vzťah

$$\tau[\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i] = \bigcup_{i=0}^{\infty} \tau[f_i].$$

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Lema (Spojitosť)

Pre ľubovolný reťazec n-árnych čiastočných funkcií

$$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_i, \ldots$$

platí vzťah

$$\forall \vec{x} \forall y \big(\tau[\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i; \vec{x}] \simeq y \leftrightarrow \exists i\, \tau[f_i; \vec{x}] \simeq y\big).$$

Dôkaz

Implikácia $(\leftarrow)$ je priamočiary dôsledok monotónnosti. Opačná implikácia sa dokazuje indukciou na štruktúru termu τ.

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Veta

Funkcionálna rovnica v neznámej f:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \ldots, x_n]$$

má najmenšie riešenie n-árnu čiastočnú funkciu $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$, ktorá je limitou reťazca $f_0, f_1, f_2, \ldots$ definovaného predpisom

$$\begin{aligned} f_0 &= \emptyset^{(n)} \\ f_{i+1}(x_1, \ldots, x_n) &\simeq \tau[f_i; x_1, \ldots, x_n]. \end{aligned}$$

Poznámka

Toto je prvá časť originálnej Kleeneho prvej vety o rekurzii. V druhej časti sa tvrdí, že najmenšie riešenie je vypočítateľné.

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Funkcionálna notácia

Symbolom $\tau[f]$ označme n-árnu čiastočnú funkciu definovanú predpisom:

$$\tau[f](x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \ldots, x_n].$$

Kleeneho prvá veta o rekurzii charakterizuje pevné body funkcionálu $\lambda f.\tau[f]$.

Veta o pevnom bode

Funkcionálna rovnica v neznámej f:

$$f = \tau[f]$$

má najmenšie riešenie n-árnu čiastočnú funkciu $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$, ktorá je limitou reťazca $f_0, f_1, f_2, \ldots$ definovaného predpisom

$$f_0 = \emptyset^{(n)} \qquad\qquad f_{i+1} = \tau[f_i].$$

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Dôkaz vety o pevnom bode

- Postupnosť $f_0, f_1, f_2, \ldots$ je reťazec, t.j.

$$\forall i \; f_i \subseteq f_{i+1}.$$

- Limita reťazca $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$ je riešenie funkcionálnej rovnice, t.j.

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i = \tau[\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i].$$

- Limita reťazca $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$ je najmenšie riešenie, t. j. ak g je riešenie funkcionálnej rovnice, potom

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i \subseteq g.$$

  Tu stačí dokázať

$$\forall i \; f_i \subseteq g.$$

$$f_0 = \emptyset^{(n)} \qquad\qquad f_{i+1} = \tau[f_i]$$

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Dôkaz vety o pevnom bode

- Postupnosť $f_0, f_1, f_2, \ldots$ je reťazec, t.j.

$$\forall i \, f_i \subseteq f_{i+1}.$$

- Limita reťazca $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$ je riešenie funkcionálnej rovnice, t.j.

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i = \tau[\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i].$$

- Limita reťazca $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$ je najmenšie riešenie, t. j. ak g je riešenie funkcionálnej rovnice, potom

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i \subseteq g.$$

  Tu stačí dokázať

$$\forall i \, f_i \subseteq g.$$

$$f_0 = \emptyset^{(n)} \qquad\qquad f_{i+1} = \tau[f_i]$$

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Dôkaz vety o pevnom bode

- Postupnosť $f_0, f_1, f_2, \ldots$ je reťazec, t.j.

$$\forall i \; f_i \subseteq f_{i+1}.$$

- Limita reťazca $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$ je riešenie funkcionálnej rovnice, t.j.

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i = \tau[\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i].$$

- Limita reťazca $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$ je najmenšie riešenie, t. j. ak g je riešenie funkcionálnej rovnice, potom

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i \subseteq g.$$

  Tu stačí dokázať

$$\forall i \; f_i \subseteq g.$$

$$f_0 = \emptyset^{(n)} \qquad\qquad f_{i+1} = \tau[f_i]$$

Rekurzívne definície

Rekurzívne definície čiastočných funkcií

Sú to definície čiastočných funkcií v tvare

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \ldots, x_n].$$

Čiastočnou funkciou, ktorá je definovaná uvedeným vzťahom, rozumieme najmenšie riešenie tejto funkcionálnej rovnice v triede n-árnych čiastočných funkcií. Existencia takého riešenia plynie z Kleeneho prvej vety o rekurzii.

Poznámka

Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tau[f; x_1, \ldots, x_n]$$

sú špeciálnym prípadom rekurzívnych definícií čiastočných funkcií. Tento fakt je to dôsledok nasledujúcich dvoch viet.

Rekurzívne definície

Veta

Predpokladajme, že

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tau[f; x_1, \ldots, x_n]$$

je regulárna rekurzívna definícia n-árnej funkcie f. Potom funkcionálna rovnica v triede n-árnych čiastočných funkcií

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \ldots, x_n]$$

je rekurzívna definícia tej istej funkcie f.

Rekurzívne definície

Dôkaz.

Predpokladajme, že rekurzívna definícia je regulárna v dobre založenej relácie $\prec$. Nech g je riešenie funkcionálnej rovnice

$$g(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[g; x_1, \ldots, x_n]. \tag{1}$$

$\prec$-indukciou podľa $x_1, \ldots, x_n$ dokážeme tvrdenie

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq g(x_1, \ldots, x_n).$$

V induktívnom kroku pre $x_1, \ldots, x_n$ dokážeme pomocné tvrdenie

$$\Gamma^\tau_\rho[f; x_1, \ldots, x_n] \to \rho[f; x_1, \ldots, x_n] \simeq \rho[g; x_1, \ldots, x_n] \tag{2}$$

pre každý podterm ρ termu τ strážený podmienkou Γ^τ_ρ v τ. Odtiaľ

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tau[f; x_1, \ldots, x_n] \overset{(2)}{\simeq} \tau[g; x_1, \ldots, x_n] \overset{(1)}{\simeq} g(x_1, \ldots, x_n).$$

Rekurzívne definície

Veta

Predpokladajme, že

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \ldots, x_n]$$

je rekurzívna definícia n-árnej čiastočnej funkcie f. Predpokladajme ďalej, že f a všetky pomocné čiastočné funkcie v terme τ sú totálne. Potom funkcionálna rovnica v triede n-árnych funkcií

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tau[f; x_1, \ldots, x_n]$$

je regulárna rekurzívna definícia tej istej funkcie f.

Rekurzívne definície

Dôkaz.

Podľa prvej vety o rekurzii funkcia f sa dá vyjadriť v tvare $f = \bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$, kde $f_0, f_1, f_2, \ldots$ je reťazec definovaný predpisom

$$f_0 = \emptyset^{(n)} \qquad\qquad f_{i+1}(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f_i; x_1, \ldots, x_n].$$

Definícia dobre založenej relácie $\prec$:

$$m(x_1, \ldots, x_n) = \text{najmenšie } i \text{ také, že } f_i(x_1, \ldots, x_n)\downarrow$$
$$(x_1, \ldots, x_n) \prec (y_1, \ldots, y_n) \leftrightarrow m(x_1, \ldots, x_n) < m(y_1, \ldots, y_n).$$

Potom funkcionálna rovnica

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tau[f; x_1, \ldots, x_n]$$

je regulárna rekurzívna definícia do dobre založenej relácie $\prec$. Jej (jediným) riešením je funkcia f.

Výpočtový model

Úvod

Uvažujme rekurzívnu definíciu n-árnej čiastočnej funkcie f v tvare

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \ldots, x_n].$$

Chceme ukázať, že f je vypočítateľná vo výpočtovom modeli, ktorý je založený na vyhodnocovaní výrazov.

Označenie a predpoklady

- $g_1, \ldots, g_k$ sú všetky pomocné čiastočné funkcie v τ.
- Každá nenulová konštanta c v terme τ je nahradená odpovedajúcim monadickým numerálom:

$$\overbrace{\mathsf{S} \ldots \mathsf{S}}^{c\text{-krát}}(0).$$

Výpočtový model

Monadické numerály

Výpočet prebieha na monadických numeráloch:

$$0 \quad \mathsf{S}(0) \quad \mathsf{S}\,\mathsf{S}(0) \quad \mathsf{S}\,\mathsf{S}\,\mathsf{S}(0) \quad \mathsf{S}\,\mathsf{S}\,\mathsf{S}\,\mathsf{S}(0) \quad \ldots .$$

Označenie:

- Ak x je prirodzené číslo, potom $\underline{x}$ je monadický numerál, ktorého hodnota je číslo x:

$$\underline{x} \equiv \overbrace{\mathsf{S} \ldots \mathsf{S}}^{x\text{-krát}}(0).$$

- Ak $x_1, \ldots, x_n$ sú prirodzené čísla, potom

$$\underline{x_1, \ldots, x_n} \equiv \underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n} \equiv \overbrace{\mathsf{S} \ldots \mathsf{S}}^{x_1\text{-krát}}(0), \ldots, \overbrace{\mathsf{S} \ldots \mathsf{S}}^{x_n\text{-krát}}(0).$$

Výpočtový model

Jeden krok výpočtu

Ak uzavretý term ρ nie je numerál, tak musí obsahovať aspoň jeden podvýraz (*redex*) v tvare

$$\mathrm{D}(\underline{x}, \rho_2, \rho_3) \quad g_1(\underline{y_1}, \dots, \underline{y_{m_1}}) \quad \dots \quad g_k(\underline{y_1}, \dots, \underline{y_{m_k}}) \quad f(\underline{x_1}, \dots, \underline{x_n}).$$

Jeden výpočtový krok spočíva v nájdení najľavejšieho redexu a jeho nahradením kontrakciou podľa nasledujúcich pravidiel

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}(\underline{0}, \rho_2, \rho_3) &\rhd_1 \rho_3 \\
\mathrm{D}(\underline{x+1}, \rho_2, \rho_3) &\rhd_1 \rho_2 \\
g_i(\underline{y_1}, \dots, \underline{y_{m_i}}) &\rhd_1 \underline{g_i(y_1, \dots, y_{m_i})} \qquad \text{pre } i = 1, \dots, k \\
f(\underline{x_1}, \dots, \underline{x_n}) &\rhd_1 \tau[f; \underline{x_1}, \dots, \underline{x_n}].
\end{aligned}$$

Tak dostaneme nový uzavretý term σ a píšeme

$$\rho \rhd_1 \sigma.$$

Výpočtový model

Viac krokov výpočtu

Označenie:

- $\rho_1 \rhd_k \rho_2$, ak výraz ρ_1 sa redukuje do výrazu ρ_2 po k krokoch. To znamená, že existujú uzavreté rekurzívne termy $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k$ také, že

  $$\rho_1 \equiv \sigma_0 \rhd_1 \sigma_1 \rhd_1 \cdots \rhd_1 \sigma_k \equiv \rho_2.$$

  Umožníme tiež prípad $k = 0$. Vtedy $\rho_1 \rhd_0 \rho_2 \leftrightarrow \rho_1 \equiv \rho_2$.
- $\rho_1 \rhd \rho_2$, ak $\rho_1 \rhd_k \rho_2$ pre nejaké k.

Platí

$$\rho \rhd \sigma_1 \wedge \rho \rhd \sigma_2 \rightarrow \sigma_1 \rhd \sigma_2 \vee \sigma_2 \rhd \sigma_1$$
$$\underline{y} \rhd \sigma \leftrightarrow \sigma \equiv \underline{y}.$$

Ak $\rho \rhd \underline{y}$, tak vravíme, že výpočet skončil s výsledkom y.

Výpočtový model

Lema (Korektnosť)

Platí

$$f(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}) \rhd \underline{y} \to f(x_1, \ldots, x_n) \simeq y.$$

Dôkaz.

Indukciou podľa k dokážeme, že pre každý uzavretý term ρ platí

$$\rho \rhd_k \underline{y} \to \rho \simeq y. \tag{1}$$

Nech $f(\underline{\vec{x}}) \rhd \underline{y}$. Potom

$$f(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}) \rhd_1 \tau[f; \underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}] \rhd_k \underline{y}$$

pre nejaké číslo k. Odtiaľ

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \ldots, x_n] \overset{(1)}{\simeq} y.$$

Výpočtový model

Lema (Úplnosť)

Platí

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq y \to f(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}) \rhd \underline{y}.$$

Dôkaz.

Podľa prvej vety o rekurzii čiastočná funkcia f sa dá vyjadriť v tvare $f = \bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$, kde $f_0, f_1, f_2, \ldots$ je reťazec definovaný predpisom

$$f_0 = \emptyset^{(n)} \qquad\qquad f_{i+1}(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f_i; x_1, \ldots, x_n].$$

Indukciou podľa i dokážeme, že platí

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) \simeq y \to f(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}) \rhd \underline{y}. \tag{1}$$

Odtiaľ dostaneme

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq y \Rightarrow \exists i\, f_i(x_1, \ldots, x_n) \simeq y \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}) \rhd \underline{y}.$$

Výpočtový model

Veta (Ekvivalentnosť výpočtovej a definičnej sémantiky)

Platí

$$f(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}) \rhd \underline{y} \leftrightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \simeq y.$$

Dôkaz.

Priamy dôsledok predošlých dvoch pomocných tvrdení.

Poznámka

Toto je druhá časť originálnej Kleeneho prvej vety o rekurzii.

Záver

7. cvičenie

- Výsledky s komentárom nájdete v MS Teams.

8. cvičenie

- Začína hneď po prednáške.
- Semestrálny test.

9. prednáška

- Čiastočne rekurzívne funkcie.
- Výpočtový model pre čiastočne rekurzívne funkcie.
- Aritmetizácia výpočtového modelu.

Koniec prednášky