2-AIN-266 Deklaratívne programovanie

Letný semester 2021/22

7. prednáška

Ján Komara

Obsah 7. prednášky

Distančná výučba

Pokyny

- Vypnite si kameru a stlmte si mikrofón.
- Komunikovať je možné počas celej prednášky.
- Ak máte otázku alebo chcete niečo povedať, tak zdvihnite ruku.
- Po vyzvaní zapnite si mikrofón.
- Po skončení ruku zložte a stlmte si mikrofón.
- Prezentácia je nahrávaná.
- Nahrávku z prednášky nájdete v tejto sekcii.
- Slajdy z prednášky nájdete pod položkou Súbory/Files.

Zopakovanie

Cieľ predmetu

- Vybudovať matematické základy deklaratívnych programovacích jazykov.

Stručná osnova predmetu

- Primitívne rekurzívne funkcie
  - Aritmetizácia dátových štruktúr.
  - Regulárne rekurzívne definície s mierou.
- Obecne rekurzívne funkcie
  - Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií:
    - Ackermannova funkcia (1928),
    - univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie.
- Čiastočne rekurzívne funkcie
  - Kleeneho prvá veta o rekurzii (veta o pevnom bode).
  - Kleeneho veta o normálnej forme.
  - Churchova téza a algoritmicky nerozhodnuteľné problémy.

Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií

Dobre založené relácie

Vravíme, že relácia $\vec{x} \prec \vec{y}$ na N^n je dobre založená (tiež noetherianská), ak každá klesajúca postupnosť

$$\vec{x}_1 \succ \vec{x}_2 \succ \vec{x}_3 \succ \vec{x}_4 \succ \cdots$$

je konečná. Tu $\vec{x} \succ \vec{y} \leftrightarrow \vec{y} \prec \vec{x}$.

Dobré usporiadania

Úplné dobre založené usporiadanie sa nazýva dobré usporiadanie.

Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií

Príklady

- Relácia $\vec{x} \prec \vec{y}$ indukovaná mierou $\mu[\vec{x}]$ do štandardného usporiadania prirodzených čísel:

$$\vec{x} \prec \vec{y} \leftrightarrow \mu[\vec{x}] < \mu[\vec{y}].$$

- Lexikografické usporiadanie dvojíc prirodzených čísel:

$$(a, b) <_{\mathrm{lex}} (c, d) \leftrightarrow a < c \vee a = c \wedge b < d.$$

Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií

Syntaktická forma rekurzie do dobre založenej relácie $\prec$

Sú to definície v tvare

$$f(\vec{x}) = \tau\left[[f]_{\vec{x}}^{\prec}; \vec{x}\right]. \tag{1}$$

Term na pravej strane rovnosti vznikol s termu $\tau[f; \vec{x}]$ nahradením každej rekurzívnej aplikácie $f(\vec{\rho})$ výrazom

$$[f]_{x}^{\prec}(\vec{\rho}) \equiv \text{if } \vec{\rho} \prec \vec{x} \text{ then } f(\vec{\rho}) \text{ else } 0.$$

Rekurzívna aplikácia $f(\vec{\rho})$ v (1) je tak strážená podmienkou $\vec{\rho} \prec \vec{x}$.

Veta

Funkcionálna rovnica (1) *má práve jedno riešenie.*

Dôkaz

Existencia riešenia je dôsledok Kleeneho vety o pevnom bode.
(Túto vetu dokážeme až na nasledujúcej prednáške.)x

Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií

Regulárna rekurzia do dobre založenej relácie $\prec$

Sú to definície v tvare

$$f(\vec{x}) = \tau[f;\vec{x}], \tag{1}$$

pre ktoré sú splnené podmienky regularity.
Podmienky regularity majú tvar:

$$\Gamma^{\tau}_{f(\vec{\rho})}[f;\vec{x}] \rightarrow \vec{\rho}[f;\vec{x}] \prec \vec{x}$$

pre každú rekurzívnu aplikáciu $f(\vec{\rho})$ funkcie f, ktorá je strážená podmienkou $\Gamma^{\tau}_{f(\vec{\rho})}$ v terme τ.
Splnenie podmienok pre funkciu definovanou pridruženou rovnosťou

$$f(\vec{x}) = \tau\left[[f]^{\prec}_{\vec{x}};\vec{x}\right]. \tag{2}$$

Táto funkcia je potom jediným riešením funkcionálnej rovnice (1).

Obecne rekurzívne funkcie

Definícia triedy obecne rekurzívnych funkcií

- Základné funkcie:
  - funkcia nasledovníka $\mathrm{S}(x) = x + 1$,
  - funkcia predchodcu $x \dot{-} 1$.
- Explicitné definície:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tau[x_1, \ldots, x_n].$$

- Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tau[f; x_1, \ldots, x_n].$$

Predikát je obecne rekurzívny, ak taká je jeho charakteristická funkcia.

Obecne rekurzívne funkcie

Príklady obecne rekurzívnych funkcií

- Ackermannova funkcia.
- Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie.

Ani jedna z týchto funkcií nie je primitívne rekurzívna.

Obecne rekurzívne funkcie

Veta

Trieda obecne rekurzívnych funkcií je primitívne rekurzívne uzavretá.

Dôsledok

- *Každá primitívne rekurzívna funkcia je obecne rekurzívna.*
- *Každý primitívne rekurzívny predikát je obecne rekurzívny.*
- *Obecne rekurzívne predikáty sú uzavreté na explicitné definície predikátov s ohraničenými formulami.*

Dôkaz vety

- Funkcia nasledovníka S je základná obecne rekurzívna funkcia.
- Obecná rekurzívnosť Z plynie z tohoto vyjadrenia $\mathrm{Z}(x) = 0$.
- Obecná rekurzívnosť I_i^n plynie z vyjadrenia $\mathrm{I}_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$.

Obecne rekurzívne funkcie

- Obecne rekurzívne funkcie sú uzavreté na kompozíciu funkcií:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = h\big(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)\big).$$

Je to totiž špeciálny prípad explicitnej definície.

- Obecne rekurzívne funkcie sú uzavreté na primitívnu rekurziu:

$$f(0, \vec{y}) = g(\vec{y}) \qquad f(x+1, \vec{y}) = h\big(x, f(x, \vec{y}), \vec{y}\big).$$

Je to špeciálny prípad regulárnej rekurzie

$$f(x, \vec{y}) = \text{if } x \neq 0 \text{ then } h\big(x \dot{-} 1, f(x \dot{-} 1, \vec{y}), \vec{y}\big) \text{ else } g(\vec{y})$$

do dobre založenej relácie $(x_1, \vec{y}_1) \prec (x_2, \vec{y}_2) \leftrightarrow x_1 < x_2$.

Obecne rekurzívne funkcie

Regulárna minimalizácia

Sú to definície funkcií v tvare

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \text{najmenšie číslo } y \text{ také, že platí } \varphi[x_1, \ldots, x_n, y],$$

kde φ je ohraničená formula spĺňajúca podmienku regularity

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y \varphi[x_1, \ldots, x_n, y].$$

Skrátený zápis

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y \left[\varphi[x_1, \ldots, x_n, y]\right].$$

Veta

Trieda obecne rekurzívnych funkcií je uzavretá na definície funkcií regulárnou minimalizáciou.

Obecne rekurzívne funkcie

Regulárna minimalizácia

Sú to definície funkcií v tvare

$$f(x_1, \ldots, x_n) = y \leftrightarrow \varphi[x_1, \ldots, x_n, y] \land \forall z < y \neg\varphi[x_1, \ldots, x_n, z],$$

kde φ je ohraničená formula spĺňajúca podmienku regularity

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y \varphi[x_1, \ldots, x_n, y].$$

Skrátený zápis

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y \left[\varphi[x_1, \ldots, x_n, y]\right].$$

Veta

Trieda obecne rekurzívnych funkcií je uzavretá na definície funkcií regulárnou minimalizáciou.

Obecne rekurzívne funkcie

Regulárna minimalizácia

Sú to definície funkcií v tvare

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \text{najmenšie číslo } y \text{ také, že platí } \varphi[x_1, \ldots, x_n, y],$$

kde φ je ohraničená formula spĺňajúca podmienku regularity

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y \varphi[x_1, \ldots, x_n, y].$$

Skrátený zápis

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y \left[\varphi[x_1, \ldots, x_n, y]\right].$$

Veta

Trieda obecne rekurzívnych funkcií je uzavretá na definície funkcií regulárnou minimalizáciou.

Obecne rekurzívne funkcie

Regulárna minimalizácia

Sú to definície funkcií v tvare

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \text{najmenšie číslo } y \text{ také, že platí } \varphi[x_1, \ldots, x_n, y],$$

kde φ je ohraničená formula spĺňajúca podmienku regularity

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y \varphi[x_1, \ldots, x_n, y].$$

Skrátený zápis

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y \left[\varphi[x_1, \ldots, x_n, y]\right].$$

Veta

Trieda obecne rekurzívnych funkcií je uzavretá na definície funkcií regulárnou minimalizáciou.

Obecne rekurzívne funkcie

Regulárna minimalizácia

Sú to definície funkcií v tvare

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \text{najmenšie číslo } y \text{ také, že platí } \varphi[x_1, \ldots, x_n, y],$$

kde φ je ohraničená formula spĺňajúca podmienku regularity

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y \varphi[x_1, \ldots, x_n, y].$$

Skrátený zápis

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y \left[\varphi[x_1, \ldots, x_n, y]\right].$$

Veta

Trieda obecne rekurzívnych funkcií je uzavretá na definície funkcií regulárnou minimalizáciou.

Obecne rekurzívne funkcie

Dôkaz.

Uvažujme regulárnu minimalizáciu v tvare

$$f(\vec{x}) = \mu y \big[\varphi[\vec{x}, y]\big].$$

Obecná rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia:

$$g(y, \vec{x}) = \begin{cases} y & \text{ak } \exists z \leq y\, \varphi[\vec{x}, z], \text{ t.j. } y \geq f(\vec{x}); \\ g(y+1, \vec{x}) & \text{ak } \forall z \leq y\, \neg\varphi[\vec{x}, z], \text{ t.j. } y < f(\vec{x}). \end{cases}$$

$$f(\vec{x}) = g(0, \vec{x}).$$

Obecne rekurzívna funkcia $g(y, \vec{x})$ je definovaná regulárnou rekurziou do dobrého usporiadania

$$(y_1, \vec{x}_1) \prec (y_2, \vec{x}_2) \leftrightarrow f(\vec{x}_1) \dot{-} y_1 < f(\vec{x}_2) \dot{-} y_2.$$

Je to (nepredikatívna) spätná rekurzia s hornou závorou $f(\vec{x})$.

Obecne rekurzívne funkcie

Veta

Funkcia je obecne rekurzívna práve vtedy, keď jej graf je obecne rekurzívny predikát.

Dôkaz.

Nech $G(\vec{x}, y)$ je graf funkcie $f(\vec{x})$. Platí:

$$G(\vec{x}, y) \leftrightarrow f(\vec{x}) = y$$
$$f(\vec{x}) = \mu y \big[G(\vec{x}, y) \big].$$

Veta je tak jednoduchý dôsledok predošlých tvrdení.

μ-Rekurzívne funkcie

Definícia triedy μ-rekurzívnych funkcií

- Základné funkcie:
  - konštantná funkcia $\mathrm{Z}(x) = 0$,
  - funkcia nasledovníka $\mathrm{S}(x) = x + 1$,
  - identity (projekcie) $\mathrm{I}_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$ pre každé $1 \leq i \leq n$.
- Kompozícia (skladanie) funkcií:

$$f(x_1, \dots, x_n) = h\big(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)\big).$$

- Primitívna rekurzia:

$$\begin{aligned} f(0, y_1, \dots, y_n) &= g(y_1, \dots, y_n) \\ f\big(\mathrm{S}(x), y_1, \dots, y_n\big) &= h\big(x, f(x, y_1, \dots, y_n), y_1, \dots, y_n\big). \end{aligned}$$

- Regulárna minimalizácia:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \mu y[g(y, x_1, \dots, x_n) = 1].$$

Predikát je μ-rekurzívny, ak taká je jeho charakteristická funkcia.

μ-Rekurzívne funkcie

Veta

Trieda μ-rekurzívnych funkcií je primitívne rekurzívne uzavretá.

Dôsledok

- *Každá primitívne rekurzívna funkcia je μ-rekurzívna.*
- *Každý primitívne rekurzívny predikát je μ-rekurzívny.*
- *μ-rekurzívne funkcie sú uzavreté na explicitné definície.*
- *μ-rekurzívne predikáty sú uzavreté na explicitné definície predikátov s ohraničenými formulami.*
- *μ-rekurzívne funkcie sú uzavreté na vnorenú jednoduchú rekurziu.*

μ-Rekurzívne funkcie

Veta

Trieda μ-rekurzívnych funkcií je uzavretá na definície funkcií regulárnou minimalizáciou.

Dôkaz.

Uvažujme regulárnu minimalizáciu v tvare

$$f(x_1, \dots, x_n) = \mu y \big[\varphi[x_1, \dots, x_n, y]\big].$$

μ-rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia:

$$\begin{aligned} P(y, x_1, \dots, x_n) &\leftrightarrow \varphi[x_1, \dots, x_n, y] \\ f(x_1, \dots, x_n) &= \mu y[P_*(y, x_1, \dots, x_n) = 1]. \end{aligned}$$

μ-Rekurzívne funkcie

Veta

Trieda μ-rekurzívnych funkcií je uzavretá na regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií.

Dôkaz

Regulárna rekurzia do dobre založenej relácie $\prec$:

$$f(\vec{x}) = \tau[f;\vec{x}].$$

Špecifikácia μ-rekurzívnej aproximačnej funkcie:

$$\forall\vec{x}\exists z\, f^{+}(z,\vec{x}+1) = f(\vec{x})+1$$
$$z_1 \leq z_2 \land f^{+}(z_1,\vec{x}+1) = y+1 \rightarrow f^{+}(z_2,\vec{x}+1) = y+1.$$

μ-rekurzívnosť funkcie f plynie potom z tohoto vyjadrenia:

$$d(\vec{x}) = \mu z[f^{+}(z,\vec{x}+1) \neq 0] \qquad f(\vec{x}) = f^{+}(d(\vec{x}),\vec{x}+1) \dot{-} 1.$$

Označenie: $\vec{x}+1 \equiv x_1+1,\ldots,x_n+1$.

μ-Rekurzívne funkcie

Konštrukcia aproximačnej funkcie, časť prvá

Aproximačná funkcia D^+ diskriminačnej funkcie D:

$$\mathrm{D}^+(x, y, z) = \mathrm{D}(x, \mathrm{D}(x \dot{-} 1, y, z), 0).$$

Pre p.r. funkciu D^+ platia vzťahy

$$\mathrm{D}^+(0, y, z) = 0 \qquad \mathrm{D}^+(x+1, y, z) = \mathrm{D}(x, y, z)$$
$$\mathrm{D}^+(x+1, y+1, z+1) = \mathrm{D}(x, y, z) + 1.$$

Aproximačná funkcia g^+ pomocnej m-árnej funkcie g:

$$g^+(\vec{y}) = \begin{cases} g(\vec{z}) + 1 & \text{ak } \vec{y} = \vec{z} + 1 \text{ pre nejaké } \vec{z}, \\ 0 & \text{ináč.} \end{cases}$$

Pre μ-rekurzívnu funkciu g^+ platia vzťahy

$$\bigvee_{i=1}^{m} y_i = 0 \to g^+(\vec{y}) = 0 \qquad g^+(\vec{y} + 1) = g(\vec{y}) + 1.$$

μ-Rekurzívne funkcie

Konštrukcia aproximačnej funkcie, časť druhá

Aproximačný term $\rho^+[f^+(z,\cdot);\vec{x}]$ pre podterm ρ termu τ:

$$\begin{aligned}
x_i^+ &\equiv x_i + 1 \\
c^+ &\equiv c + 1 \\
\mathrm{D}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)^+ &\equiv \mathrm{D}^+(\rho_1^+,\rho_2^+,\rho_3^+) \\
g(\rho_1,\ldots,\rho_m)^+ &\equiv g^+(\rho_1^+,\ldots,\rho_m^+) \\
f(\rho_1,\ldots,\rho_n)^+ &\equiv f^+(z,\rho_1^+,\ldots,\rho_n^+).
\end{aligned}$$

Definícia aproximačnej funkcie má tvar vnorenej jednoduchej rekurzie:

$$\begin{aligned}
f^+(0,\vec{x}) &= 0 \\
f^+(z+1,\vec{x}) &= \tau^+[f^+(z,\cdot);\vec{x}].
\end{aligned}$$

Aproximačná funkcia je preto μ-rekurzívna.

μ-Rekurzívne funkcie

Lema

Trieda obecne rekurzívnych funkcií je μ-rekurzívne uzavretá.
Dôsledok: každá μ-rekurzívna funkcia je obecne rekurzívna.

Dôkaz

- Trieda obecne rekurz. funkcií je primitívne rekurz. uzavretá:
  - S, Z, I_i^n sú obecne rekurzívne funkcie.
  - Trieda je uzavretá na operátor kompozície funkcií:

    $$f(\vec{x}) = h\big(g_1(\vec{x}), \ldots, g_m(\vec{x})\big)$$

    a na operátor primitívnej rekurzie:

    $$f(0, \vec{y}) = g(\vec{y}) \qquad f(x+1, \vec{y}) = h\big(x, f(x, \vec{y}), \vec{y}\big).$$

- Trieda obecne rekurzívnych funkcií je uzavretá na operátor regulárnej minimalizácie:

  $$f(\vec{x}) = \mu y[g(y, \vec{x}) = 1].$$

μ-Rekurzívne funkcie

Lema

Trieda μ-rekurzívnych funkcií je obecne rekurzívne uzavretá.
Dôsledok: každá obecne rekurzívna funkcia je μ-rekurzívna.

Dôkaz

- Trieda μ-rekurzívnych funkcií je primitívne rekurzívne uzavretá. Dôsledok:
  - Funkcia nasledovníka $\mathrm{S}(x) = x + 1$ a funkcia predchodcu $x \dot{-} 1$ sú μ-rekurzívne funkcie.
  - Trieda je uzavretá na explicitné definície funkcií:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tau[x_1, \ldots, x_n].$$

- Trieda μ-rekurzívnych funkcií je uzavretá na regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tau[f; x_1, \ldots, x_n].$$

μ-Rekurzívne funkcie

Veta

Trieda obecne rekurzívnych funkcií je totožná s triedou μ-rekurzívnych funkcií.

Dôkaz.

Priamy dôsledok predošlých tvrdení.

Churchova téza (1936)

Trieda intuitívne vypočítateľných funkcií nad oborom prirodzených čísel je totožná s triedou obecne rekurzívnych funkcií.

Modely vypočítateľných funkcií (do roku 1935)

- obecne rekurzívne funkcie [Herbrand-Gödel, 1931, 1934],
- λ-definovateľné funkcie [Church, 1932],
- μ-rekurzívne funkcie [Kleene, 1935, 1952].

Efektívne operácie na primitívne rekurzívnych indexoch

Špecifikácia interpretra

Interpreter programovacieho jazyka p.r. odvodení je binárna funkcia $e \bullet x$, ktorá má tieto dve základné vlastnosti:

- Pre každý n-árny p.r. funkčný symbol f a n-ticu čísel $x_1, \ldots, x_n$ platí rovnosť:

  $$\ulcorner f \urcorner \bullet \langle x_1, \ldots, x_n \rangle = f^{\mathcal{N}}(x_1, \ldots, x_n).$$

  Tu $\ulcorner f \urcorner \in \mathrm{N}$ je kód a $f^{\mathcal{N}} : \mathrm{N}^n \to \mathrm{N}$ interpretácia symbolu f.
- Pre každé číslo e, unárna funkcia f definovaná vzťahom

  $$f(x) = e \bullet x$$

  je primitívne rekurzívna funkcia.

Primitívne rekurzívne odvodenia sú reprezentované p.r. funkčnými symbolmi.

Efektívne operácie na primitívne rekurzívnych indexoch

Implementácia interpretra

Diskriminácia podľa konštruktorov p.r. funkčných symbolov:

$$
\begin{array}{l}
e \bullet x = \text{case} \\
\qquad\qquad e = \boldsymbol{Z} \Rightarrow 0 \\
\qquad\qquad e = \boldsymbol{S} \Rightarrow x + 1 \\
\qquad\qquad e = \boldsymbol{I}_i^n \Rightarrow [x]_i^n \\
\qquad\qquad e = \langle g, gs \rangle \Rightarrow \langle g \bullet x, gs \bullet x \rangle \\
\qquad\qquad e = \boldsymbol{Comp}_m^n(h, gs) \Rightarrow h \bullet (gs \bullet x) \\
\qquad\qquad e = \boldsymbol{Rec}_n(g, h) \Rightarrow \\
\qquad\qquad\quad \text{case} \\
\qquad\qquad\qquad x = \langle 0, y \rangle \Rightarrow g \bullet y \\
\qquad\qquad\qquad x = \langle z + 1, y \rangle \Rightarrow h \bullet \langle z, \boldsymbol{Rec}_n(g, h) \bullet \langle z, y \rangle, y \rangle \\
\qquad\qquad\qquad \text{otherwise} \Rightarrow 0 \\
\qquad\qquad\quad \text{end} \\
\qquad\qquad \text{otherwise} \Rightarrow 0 \\
\qquad \text{end.}
\end{array}
$$

Efektívne operácie na primitívne rekurzívnych indexoch

Implementácia interpretra

Definícia interpretra pomocou vnorenej dvojitej rekurzie:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Z} \bullet x &= 0 \\
\boldsymbol{S} \bullet x &= x + 1 \\
\boldsymbol{I}_i^n \bullet x &= [x]_i^n \\
\langle g, gs \rangle \bullet x &= \big\langle g \bullet x, gs \bullet x \big\rangle \\
\boldsymbol{Comp}_m^n(h, gs) \bullet x &= h \bullet (gs \bullet x) \\
\boldsymbol{Rec}_n(g, h) \bullet \langle 0, y \rangle &= g \bullet y \\
\boldsymbol{Rec}_n(g, h) \bullet \langle x + 1, y \rangle &= h \bullet \big\langle x, \boldsymbol{Rec}_n(g, h) \bullet \langle x, y \rangle, y \big\rangle.
\end{aligned}
$$

Podmienky regularity pre funkciu $e \bullet x$ sú triviálne splnené, napr.

$$
\begin{aligned}
\big(\boldsymbol{Rec}_n(g, h), \langle x, y \rangle\big) &<_{\mathrm{lex}} \big(\boldsymbol{Rec}_n(g, h), \langle x + 1, y \rangle\big) \\
\big(h, \big\langle x, \boldsymbol{Rec}_n(g, h) \bullet \langle x, y \rangle, y \big\rangle\big) &<_{\mathrm{lex}} \big(\boldsymbol{Rec}_n(g, h), \langle x + 1, y \rangle\big).
\end{aligned}
$$

Efektívne operácie na primitívne rekurzívnych indexoch

Primitívne rekurzívne indexy

Prirodzené číslo e také, že

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n\, f(x_1, \ldots, x_n) = e \bullet \langle x_1, \ldots, x_n \rangle,$$

sa nazýva primitívne rekurzívny index funkcie f.

Veta

Funkcia je primitívne rekurzívna práve vtedy, keď má primitívne rekurzívny index.

Dobre vytvorené primitívne rekurzívne indexy

Predikát $Prf(n, e)$ platí, ak číslo e je dobre vytvorený primitívne rekurzívny index nejakej n-árnej p.r. funkcie, t.j. $e = \ulcorner f \urcorner$ pre nejaké $f \in \mathrm{PR}^n$.

Efektívne operácie na primitívne rekurzívnych indexoch

Príklad

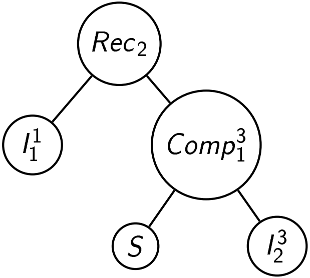
Primitívne rekurzívne odvodenie operácie sčítania

$$h(x, z, y) = \mathsf{S}\, \mathsf{I}^3_2(x, z, y)$$

$$\begin{aligned} 0 + y &= y & \qquad 0 + y &= \mathsf{I}(y) \\ x + 1 + y &= x + y + 1 & \qquad \mathsf{S}(x) + y &= h(x, x + y, y) \end{aligned}$$

Primitívne rekurzívny funkčný symbol

$$Rec_2(I^1_1, Comp^3_1(S, I^3_2))$$



a jeho aritmetizácia (p.r. index)

$$\boldsymbol{Rec}_2(\boldsymbol{I}^1_1, \boldsymbol{Comp}^3_1(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{I}^3_2)).$$

Efektívne operácie na primitívne rekurzívnych indexoch

Konštantné funkcie

Špecifikácia unárnej p.r. funkcie $\mathbf{C}_m$:

$$Prf(1, \mathbf{C}_m) \land \forall x\, \mathbf{C}_m \bullet x = m.$$

Špecifikácia binárnej p.r. funkcie $\mathbf{C}^n_m$: pre každé $n \geq 1$ platí

$$Prf(n, \mathbf{C}^n_m) \land \forall x_1 \ldots \forall x_n\, \mathbf{C}^n_m \bullet \langle x_1, \ldots, x_n \rangle = m.$$

Efektívne operácie na primitívne rekurzívnych indexoch

Iterácia unárnej funkcie

Špecifikácia unárnej p.r. funkcie $\boldsymbol{Iter}(e)$:

$$
\begin{aligned}
Prf(1, e) &\to Prf\big(2, \boldsymbol{Iter}(e)\big) \\
\boldsymbol{Iter}(e) \bullet \langle 0, x\rangle &= x \\
\boldsymbol{Iter}(e) \bullet \langle n+1, x\rangle &= e \bullet \big(\boldsymbol{Iter}(e) \bullet \langle n, x\rangle\big).
\end{aligned}
$$

Efektívne operácie na primitívne rekurzívnych indexoch

Bezparametrická primitívna rekurzia

Špecifikácia binárnej p.r. funkcie $\boldsymbol{Rec0}(m, e)$:

$$
\begin{aligned}
Prf(2, e) &\rightarrow Prf\big(1, \boldsymbol{Rec0}(m, e)\big) \\
\boldsymbol{Rec0}(m, e) \bullet 0 &= m \\
\boldsymbol{Rec0}(m, e) \bullet (x + 1) &= e \bullet \big\langle x, \boldsymbol{Rec0}(m, e) \bullet x \big\rangle.
\end{aligned}
$$

Efektívne operácie na primitívne rekurzívnych indexoch

Parametrická funkcia

Špecifikácia binárnej p.r. funkcie e/x:

$$Prf(2, e) \to Prf(1, e/x)$$
$$(e/x) \bullet y = e \bullet \langle x, y \rangle.$$

Záver

6. cvičenie

- Výsledky s komentárom nájdete v MS Teams.

7. cvičenie

- Začína hneď po prednáške.
- Úlohy odovzdať do MOODLE najneskôr do 18:00 v sobotu tento týždeň.

8. prednáška

- Kleeneho prvá veta o rekurzii (veta o pevnom bode).
- Čiastočne rekurzívne funkcie.

8. cvičenie

- Semestrálny test.

Koniec prednášky