2-AIN-266 Deklaratívne programovanie

Letný semester 2021/22

6. prednáška

Ján Komara

Obsah 6. prednášky

Distančná výučba

Pokyny

- Vypnite si kameru a stlmte si mikrofón.
- Komunikovať je možné počas celej prednášky.
- Ak máte otázku alebo chcete niečo povedať, tak zdvihnite ruku.
- Po vyzvaní zapnite si mikrofón.
- Po skončení ruku zložte a stlmte si mikrofón.
- Prezentácia je nahrávaná.
- Nahrávku z prednášky nájdete v tejto sekcii.
- Slajdy z prednášky nájdete pod položkou Súbory/Files.

Zopakovanie

Cieľ predmetu

- Vybudovať matematické základy deklaratívnych programovacích jazykov.

Stručná osnova predmetu

- Primitívne rekurzívne funkcie
  - Aritmetizácia dátových štruktúr.
  - Regulárne rekurzívne definície s mierou.
- Obecne rekurzívne funkcie
  - Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií:
    - Ackermannova funkcia (1928),
    - univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie.
- Čiastočne rekurzívne funkcie
  - Kleeneho prvá veta o rekurzii (veta o pevnom bode).
  - Kleeneho veta o normálnej forme.
  - Churchova téza a algoritmicky nerozhodnuteľné problémy.

Zopakovanie

Syntaktická forma rekurzie s mierou $\mu[\vec{x}]$

Sú to definície v tvare

$$f(\vec{x}) = \tau\big[[f]^{\mu}_{\vec{x}}; \vec{x}\big]. \tag{1}$$

Term na pravej strane rovnosti vznikol s termu $\tau[f; \vec{x}]$ nahradením každej rekurzívnej aplikácie $f(\vec{\rho})$ výrazom

$$[f]_{\vec{x}}(\vec{\rho}) \equiv \text{if } \mu[\vec{\rho}] < \mu[\vec{x}] \text{ then } f(\vec{\rho}) \text{ else } 0.$$

Každá rekurzívna aplikácia $f(\vec{\rho})$ v (1) je teda strážená podmienkou $\mu[\vec{\rho}] < \mu[\vec{x}]$.

Zopakovanie

Regulárna rekurzia s mierou $\mu[\vec{x}]$

Sú to definície v tvare

$$f(\vec{x}) = \tau[f; \vec{x}], \tag{1}$$

pre ktoré sú splnené podmienky regularity. Tie majú tvar:

$$\Gamma^{\tau}_{f(\vec{\rho})}[f; \vec{x}] \to \mu[\vec{\rho}[f; \vec{x}]] < \mu[\vec{x}]$$

pre každú rek. aplikáciu $f(\vec{\rho})$ stráženú podmienkou $\Gamma^{\tau}_{f(\vec{\rho})}$ v τ.
Splnenie podmienok sa overuje pre funkciu definovanú rovnosťou:

$$f(\vec{x}) = \tau\left[[f]^{\mu}_{\vec{x}}; \vec{x}\right]. \tag{2}$$

Táto funkcia je potom jediným riešením funkcionálnej rovnice (1).

Zopakovanie

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na regulárnu rekurziu s mierou.

Veta

Trieda primitívne rekurzívnych funkcií je najmenšia trieda funkcií, ktorá obsahuje funkciu nasledovníka $\mathrm{S}(x) = x + 1$*, funkciu predchodcu* $x \dot{-} 1$ *a je uzavretá na explicitné definície a regulárnu rekurziu s mierou.*

Ackermannova funkcia

Ackermannova funkcia (1928)

Postupnosť binárnych p.r. funkcií A_x $(x = 0, 1, 2, \ldots)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_0(y,z) &= y + z \\
\mathrm{A}_1(y,z) &= y \cdot z \\
\mathrm{A}_2(y,z) &= y^z.
\end{aligned}$$

Definícia $\lambda xyz.\, \mathrm{A}_x(y,z)$ pomocou vnorenej dvojitej rekurzie

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_0(y,z) &= y + z \\
\mathrm{A}_{x+1}(y,0) &= (x =_* 1) + (x \geq_* 2) \cdot y \\
\mathrm{A}_{x+1}(y,z+1) &= \mathrm{A}_x\big(y, \mathrm{A}_{x+1}(y,z)\big).
\end{aligned}$$

Táto funkcia nie je primitívne rekurzívna, pretože jej diagonalizácia $\lambda x.\, \mathrm{A}_x(x,x)$ majorizuje každú unárnu p.r. funkciu.

Ackermannova funkcia

Ackermannova funkcia (1928)

Postupnosť binárnych p.r. funkcií A_x $(x = 0, 1, 2, \ldots)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_0(y,z) &= y + z \\ \mathrm{A}_1(y,z) &= y \cdot z \\ \mathrm{A}_2(y,z) &= y^z. \end{aligned}$$

Definícia $\lambda xyz.\, \mathrm{A}_x(y,z)$ pomocou vnorenej dvojitej rekurzie

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_0(y,z) &= y + z \\ \mathrm{A}_{x+1}(y,0) &= (x =_* 1) + (x \geq_* 2) \cdot y \\ \mathrm{A}_{x+1}(y,z+1) &= \mathrm{A}_x\big(y, \mathrm{A}_{x+1}(y,z)\big). \end{aligned}$$

Táto funkcia nie je primitívne rekurzívna, pretože jej diagonalizácia $\lambda x.\, \mathrm{A}_x(x,x)$ majorizuje každú unárnu p.r. funkciu.

Ackermannova funkcia

Ackermannova funkcia (1928)

Postupnosť binárnych p.r. funkcií A_x $(x = 0, 1, 2, \ldots)$:

$$\begin{aligned} \mathsf{A}_0(y,z) &= y + z \\ \mathsf{A}_1(y,z) &= y \cdot z \\ \mathsf{A}_2(y,z) &= y^z. \end{aligned}$$

Definícia $\lambda xyz.\, \mathsf{A}_x(y,z)$ pomocou vnorenej dvojitej rekurzie

$$\begin{aligned} \mathsf{A}_0(y,z) &= y + z \\ \mathsf{A}_{x+1}(y,0) &= (x =_* 1) + (x \geq_* 2) \cdot y \\ \mathsf{A}_{x+1}(y,z+1) &= \mathsf{A}_x\big(y, \mathsf{A}_{x+1}(y,z)\big). \end{aligned}$$

Táto funkcia nie je primitívne rekurzívna, pretože jej diagonalizácia $\lambda x.\, \mathsf{A}_x(x,x)$ majorizuje každú unárnu p.r. funkciu.

Ackermannova funkcia

Ackermann-Péterovej funkcia

Definícia pomocou vnorenej dvojitej rekurzie

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}(0,y) &= y+1 \\
\mathrm{A}(x+1,0) &= \mathrm{A}(x,1) \\
\mathrm{A}(x+1,y+1) &= \mathrm{A}\big(x,\mathrm{A}(x+1,y)\big).
\end{aligned}
$$

Napríklad:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}(1,y) &= y+2 \\
\mathrm{A}(2,y) &= 2{\cdot}y+3 = 2{\cdot}(y+3) \dot{-} 3 \\
\mathrm{A}(3,y) &= 8{\cdot}2^{y} \dot{-} 3 = 2^{y+3} \dot{-} 3.
\end{aligned}
$$

Funkcia nie je primitívne rekurzívna, pretože jej diagonalizácia $\lambda x.\, \mathrm{A}(x,x)$ majorizuje každú unárnu p.r. funkciu.

Ackermannova funkcia

Ackermann-Péterovej funkcia

Definícia pomocou vnorenej dvojitej rekurzie

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}(0, y) &= y + 1 \\
\mathrm{A}(x+1, 0) &= \mathrm{A}(x, 1) \\
\mathrm{A}(x+1, y+1) &= \mathrm{A}\big(x, \mathrm{A}(x+1, y)\big).
\end{aligned}
$$

Napríklad:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}(1, y) &= y + 2 \\
\mathrm{A}(2, y) &= 2 \cdot y + 3 = 2 \cdot (y + 3) \dot{-} 3 \\
\mathrm{A}(3, y) &= 8 \cdot 2^{y} \dot{-} 3 = 2^{y+3} \dot{-} 3.
\end{aligned}
$$

Funkcia nie je primitívne rekurzívna, pretože jej diagonalizácia $\lambda x.\, \mathrm{A}(x, x)$ majorizuje každú unárnu p.r. funkciu.

Ackermannova funkcia

Ackermann-Péterovej funkcia

Definícia pomocou vnorenej dvojitej rekurzie

$$\begin{aligned} \mathrm{A}(0, y) &= y + 1 \\ \mathrm{A}(x+1, 0) &= \mathrm{A}(x, 1) \\ \mathrm{A}(x+1, y+1) &= \mathrm{A}\big(x, \mathrm{A}(x+1, y)\big). \end{aligned}$$

Napríklad:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}(1, y) &= y + 2 \\ \mathrm{A}(2, y) &= 2 \cdot y + 3 = 2 \cdot (y + 3) \dot{-} 3 \\ \mathrm{A}(3, y) &= 8 \cdot 2^{y} \dot{-} 3 = 2^{y+3} \dot{-} 3. \end{aligned}$$

Funkcia nie je primitívne rekurzívna, pretože jej diagonalizácia $\lambda x.\, \mathrm{A}(x, x)$ majorizuje každú unárnu p.r. funkciu.

Ackermannova funkcia

Podmienky regularity pre Ackermann-Péterovej funkciu

Lexikografické usporiadanie dvojíc prirodzených čísel

$$(a, b) <_{\mathrm{lex}} (c, d) \leftrightarrow a < c \vee a = c \wedge b < d.$$

Je to dobré usporiadanie: každá klesajúca postupnosť je konečná

$$(a_1, b_1) >_{\mathrm{lex}} (a_2, b_2) >_{\mathrm{lex}} (a_3, b_3) >_{\mathrm{lex}} (a_4, b_4) >_{\mathrm{lex}} \cdots .$$

Podmienky regularity pre funkciu $\mathrm{A}(x, y)$ sú triviálne splnené:

$$\begin{aligned} (x, 1) &<_{\mathrm{lex}} (x + 1, 0) \\ (x + 1, y) &<_{\mathrm{lex}} (x + 1, y + 1) \\ \big(x, \mathrm{A}(x + 1, y)\big) &<_{\mathrm{lex}} (x + 1, y + 1). \end{aligned}$$

Definícia transfinitnou rekurziou do dobrého usporiadania $<_{\mathrm{lex}}$.

Ackermannova funkcia

Podmienky regularity pre Ackermann-Péterovej funkciu

Lexikografické usporiadanie dvojíc prirodzených čísel

$$(a, b) <_{\text{lex}} (c, d) \leftrightarrow a < c \lor a = c \land b < d.$$

Je to dobré usporiadanie: každá klesajúca postupnosť je konečná

$$(a_1, b_1) >_{\text{lex}} (a_2, b_2) >_{\text{lex}} (a_3, b_3) >_{\text{lex}} (a_4, b_4) >_{\text{lex}} \cdots .$$

Podmienky regularity pre funkciu $\mathrm{A}(x, y)$ sú triviálne splnené:

$$\begin{aligned} (x, 1) &<_{\text{lex}} (x + 1, 0) \\ (x + 1, y) &<_{\text{lex}} (x + 1, y + 1) \\ \bigl(x, \mathrm{A}(x + 1, y)\bigr) &<_{\text{lex}} (x + 1, y + 1). \end{aligned}$$

Definícia transfinitnou rekurziou do dobrého usporiadania $<_{\text{lex}}$.

Ackermannova funkcia

Ackermann-Péterovej funkcia

Definícia pomocou vnorenej dvojitej rekurzie

$$\begin{aligned} \mathrm{A}(0, y) &= y + 1 \\ \mathrm{A}(x+1, 0) &= \mathrm{A}(x, 1) \\ \mathrm{A}(x+1, y+1) &= \mathrm{A}\big(x, \mathrm{A}(x+1, y)\big). \end{aligned}$$

Napríklad:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}(1, y) &= y + 2 \\ \mathrm{A}(2, y) &= 2{\cdot}y + 3 = 2{\cdot}(y+3) \dot{-} 3 \\ \mathrm{A}(3, y) &= 8{\cdot}2^{y} \dot{-} 3 = 2^{y+3} \dot{-} 3. \end{aligned}$$

Funkcia nie je primitívne rekurzívna, pretože jej diagonalizácia $\lambda x.\, \mathrm{A}(x, x)$ majorizuje každú unárnu p.r. funkciu.

Ackermannova funkcia

Podmienky regularity pre Ackermann-Péterovej funkciu

Lexikografické usporiadanie dvojíc prirodzených čísel

$$(a, b) <_{\mathrm{lex}} (c, d) \leftrightarrow a < c \vee a = c \wedge b < d.$$

Je to dobré usporiadanie: každá klesajúca postupnosť je konečná

$$(a_1, b_1) >_{\mathrm{lex}} (a_2, b_2) >_{\mathrm{lex}} (a_3, b_3) >_{\mathrm{lex}} (a_4, b_4) >_{\mathrm{lex}} \cdots .$$

Podmienky regularity pre funkciu $\mathrm{A}(x, y)$ sú triviálne splnené:

$$\begin{aligned}(x, 1) &<_{\mathrm{lex}} (x + 1, 0)\\ (x + 1, y) &<_{\mathrm{lex}} (x + 1, y + 1)\\ \big(x, \mathrm{A}(x + 1, y)\big) &<_{\mathrm{lex}} (x + 1, y + 1).\end{aligned}$$

Definícia transfinitnou rekurziou do dobrého usporiadania $<_{\mathrm{lex}}$.

Ackermannova funkcia

Ackermann-Péterovej funkcia

Definícia pomocou vnorenej dvojitej rekurzie

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}(0, y) &= y + 1 \\
\mathrm{A}(x+1, 0) &= \mathrm{A}(x, 1) \\
\mathrm{A}(x+1, y+1) &= \mathrm{A}\big(x, \mathrm{A}(x+1, y)\big).
\end{aligned}
$$

Napríklad:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}(1, y) &= y + 2 \\
\mathrm{A}(2, y) &= 2 \cdot y + 3 = 2 \cdot (y + 3) \dot{-} 3 \\
\mathrm{A}(3, y) &= 8 \cdot 2^y \dot{-} 3 = 2^{y+3} \dot{-} 3.
\end{aligned}
$$

Funkcia nie je primitívne rekurzívna, pretože jej diagonalizácia $\lambda x.\, \mathrm{A}(x, x)$ majorizuje každú unárnu p.r. funkciu.

Ackermannova funkcia

Graf Ackermann-Péterovej funkcie

Funkcia $\mathrm{A}(x, y)$ nie je primitívne rekurzívna, ale jej graf

$$G(x, y, z) \leftrightarrow \mathrm{A}(x, y) = z$$

je primitívne rekurzívny predikát.
Idea dôkazu: vyjadriť graf v tvare

$$G(x, y, z) \leftrightarrow \exists s \leq b(z) \left(Cvs(s) \wedge \langle x, y, z \rangle \ \varepsilon \ s \right),$$

kde

- $Cvs(s)$ je p.r. predikát, ktorý platí, ak s je postupnosť histórie výpočtu Ackermann-Péterovej funkcie;
- $b(z)$ je p.r. funkcia, ktorá dáva odhad na veľkosť takejto postupnosti pre výsledok výpočtu z.

Primitívne rekurzívne funkcie

- Základné funkcie:
  - konštantná funkcia $\mathrm{Z}(x) = 0$,
  - funkcia nasledovníka $\mathrm{S}(x) = x + 1$,
  - identity (projekcie):
  $$\mathrm{I}_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$$
  pre každé $1 \leq i \leq n$.
- Kompozícia (skladanie) funkcií:
$$f(x_1, \ldots, x_n) = h\big(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)\big).$$
- Primitívna rekurzia:
$$\begin{aligned} f(0, y_1, \ldots, y_n) &= g(y_1, \ldots, y_n) \\ f\big(\mathrm{S}(x), y_1, \ldots, y_n\big) &= h\big(x, f(x, y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n\big). \end{aligned}$$

Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie

Aritmetizácia

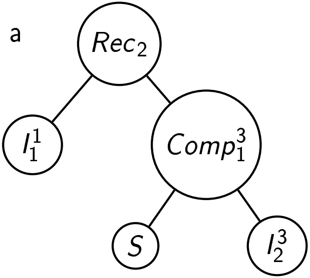
Príklad

Primitívne rekurzívne odvodenie operácie sčítania

$$\begin{aligned} & & h(x,z,y) &= \mathsf{S}\,\mathsf{I}^3_2(x,z,y) \\ 0+y &= y & 0+y &= \mathsf{I}(y) \\ x+1+y &= x+y+1 & \mathsf{S}(x)+y &= h(x,x+y,y). \end{aligned}$$

Primitívne rekurzívny funkčný symbol a jeho syntaktický strom:

$$Rec_2(I^1_1, Comp^3_1(S, I^3_2))$$



Primitívne rekurzívne funkčné symboly

Trieda PR^n pozostáva z n-árnych p.r. funkčných symbolov:

- $Z \in \mathrm{PR}^1$, $S \in \mathrm{PR}^1$ a $I_i^n \in \mathrm{PR}^n$ pre $1 \leq i \leq n$.
- Ak $h \in \mathrm{PR}^m$ a $g_1, \ldots, g_m \in \mathrm{PR}^n$, potom
$$Comp_m^n(h, g_1, \ldots, g_m) \in \mathrm{PR}^n.$$
- Ak $g \in \mathrm{PR}^n$ a $h \in \mathrm{PR}^{n+2}$, potom
$$Rec_{n+1}(g, h) \in \mathrm{PR}^{n+1}.$$

Ich zjednotenie je množina všetkých p.r. funkčných symbolov
$$\mathrm{PR} = \bigcup_{n \geq 1} \mathrm{PR}^n.$$

Interpretácia primitívne rekurzívnych funkčných symbolov

Symbol $f \in \mathrm{PR}^n$ interpretujeme ako n-árnu funkciu $f^{\mathcal{N}}$ nad $\mathbb{N}$:

- $Z^{\mathcal{N}}$ je konštantná funkcia $\mathrm{Z}(x) = 0$.
- $S^{\mathcal{N}}$ je funkcia nasledovníka $\mathrm{S}(x) = x + 1$.
- $(I_i^n)^{\mathcal{N}}$ je identita $\mathrm{I}_i^n(\vec{x}) = x_i$.
- $\left(Comp_m^n(h, g_1, \dots, g_m)\right)^{\mathcal{N}}$ je funkcia definovaná kompozíciou

$$\left(Comp_m^n(h, g_1, \dots, g_m)\right)^{\mathcal{N}}(\vec{x}) = h^{\mathcal{N}}\left(g_1^{\mathcal{N}}(\vec{x}), \dots, g_m^{\mathcal{N}}(\vec{x})\right).$$

- $\left(Rec_n(g, h)\right)^{\mathcal{N}}$ je funkcia definovaná primitívnou rekurziou

$$\begin{aligned}\left(Rec_n(g, h)\right)^{\mathcal{N}}(0, \vec{y}) &= g^{\mathcal{N}}(\vec{y})\\ \left(Rec_n(g, h)\right)^{\mathcal{N}}(x+1, \vec{y}) &= h^{\mathcal{N}}\left(x, \left(Rec_n(g, h)\right)^{\mathcal{N}}(x, \vec{y}), \vec{y}\right).\end{aligned}$$

Aritmetizácia primitívne rekurzívnych funkčných symbolov

Pomocou párových konštruktorov z rôznymi rozlišovacími položkami:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Z} &= \langle 1, 0 \rangle && \text{(konštantná funkcia)}\\
\boldsymbol{S} &= \langle 2, 0 \rangle && \text{(funkcia nasledovníka)}\\
\boldsymbol{I}^n_i &= \langle 3, n, i \rangle && \text{(identity)}\\
\boldsymbol{\langle} g, gs \boldsymbol{\rangle} &= \langle 4, g, gs \rangle && \text{(kontrakcia)}\\
\boldsymbol{Comp}^n_m(h, gs) &= \langle 5, n, m, h, gs \rangle && \text{(kompozícia)}\\
\boldsymbol{Rec}_n(g, h) &= \langle 6, n, g, h \rangle. && \text{(primitívna rekurzia)}
\end{aligned}$$

Pre konštruktor $\boldsymbol{\langle} g, gs \boldsymbol{\rangle}$ používame podobné notačné konvencie ako pre párovaciu funkciu $\langle x, y \rangle$.

Aritmetizácia primitívne rekurzívnych funkčných symbolov

Číslo $\ulcorner f \urcorner \in \mathrm{N}$ označuje kód (aritmetizáciu) primitívne rekurzívneho funkčného symbolu $f \in$ PR. Induktívna definícia:

$$
\begin{aligned}
\ulcorner Z \urcorner &= \boldsymbol{Z} \\
\ulcorner S \urcorner &= \boldsymbol{S} \\
\ulcorner I_i^n \urcorner &= \boldsymbol{I}_i^n \\
\ulcorner Comp_m^n(h, g_1, \ldots, g_m) \urcorner &= \boldsymbol{Comp}_m^n\big(\ulcorner h \urcorner, \langle \ulcorner g_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner g_m \urcorner \rangle\big) \\
\ulcorner Rec_n(g, h) \urcorner &= \boldsymbol{Rec}_n(\ulcorner g \urcorner, \ulcorner h \urcorner).
\end{aligned}
$$

Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie

Aritmetizácia

Príklad

Primitívne rekurzívne odvodenie operácie sčítania

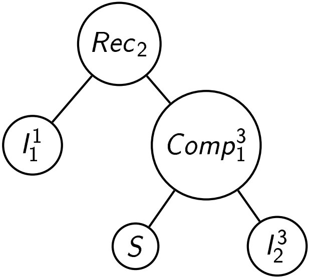
$$\begin{aligned} & & h(x, z, y) &= \mathsf{S}\,\mathsf{I}^3_2(x, z, y) \\ 0 + y &= y & 0 + y &= \mathsf{I}(y) \\ x + 1 + y &= x + y + 1 & \mathsf{S}(x) + y &= h(x, x + y, y). \end{aligned}$$

Primitívne rekurzívny funkčný symbol

$$Rec_2(I^1_1, Comp^3_1(S, I^3_2))$$

a jeho aritmetizácia

$$\boldsymbol{Rec}_2(\boldsymbol{I}^1_1, \boldsymbol{Comp}^3_1(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{I}^3_2)).$$



Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie

Aritmetizácia

Definícia

Prirodzené číslo e také, že

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n\, f(x_1, \ldots, x_n) = e \bullet \langle x_1, \ldots, x_n \rangle,$$

sa nazýva primitívne rekurzívny index funkcie f.

Veta

Funkcia je primitívne rekurzívna práve vtedy, keď má primitívne rekurzívny index.

Definícia

Predikát $Prf(n, e)$ platí, ak číslo e je *dobre vytvorený* primitívne rekurzívny index nejakej n-árnej primitívne rekurzívnej funkcie, t.j. $e = \ulcorner f \urcorner$ pre nejaké $f \in \mathrm{PR}^n$.

Špecifikácia interpretra

Interpreter programovacieho jazyka p.r. odvodení je binárna funkcia $e \bullet x$, ktorá má tieto dve základné vlastnosti:

- Pre každý n-árny p.r. funkčný symbol f a n-ticu čísel $x_1, \ldots, x_n$ platí rovnosť:

$$\ulcorner f \urcorner \bullet \langle x_1, \ldots, x_n \rangle = f^{\mathcal{N}}(x_1, \ldots, x_n).$$

  Tu $\ulcorner f \urcorner \in \mathrm{N}$ je kód a $f^{\mathcal{N}} : \mathrm{N}^n \to \mathrm{N}$ interpretácia symbolu f.

- Pre každé číslo e, unárna funkcia f definovaná vzťahom

$$f(x) = e \bullet x$$

  je primitívne rekurzívna funkcia.

Primitívne rekurzívne odvodenia sú reprezentované p.r. funkčnými symbolmi.

Implementácia interpretra

Diskriminácia podľa konštruktorov p.r. funkčných symbolov:

$$
\begin{array}{l}
e \bullet x = \text{case} \\
\qquad\qquad e = \boldsymbol{Z} \Rightarrow 0 \\
\qquad\qquad e = \boldsymbol{S} \Rightarrow x + 1 \\
\qquad\qquad e = \boldsymbol{I}^n_i \Rightarrow [x]^n_i \\
\qquad\qquad e = \langle g, gs \rangle \Rightarrow \left\langle g \bullet x, gs \bullet x \right\rangle \\
\qquad\qquad e = \boldsymbol{Comp}^n_m(h, gs) \Rightarrow h \bullet (gs \bullet x) \\
\qquad\qquad e = \boldsymbol{Rec}_n(g, h) \Rightarrow \\
\qquad\qquad\quad \text{case} \\
\qquad\qquad\qquad x = \langle 0, y \rangle \Rightarrow g \bullet y \\
\qquad\qquad\qquad x = \langle z + 1, y \rangle \Rightarrow h \bullet \left\langle z, \boldsymbol{Rec}_n(g, h) \bullet \langle z, y \rangle, y \right\rangle \\
\qquad\qquad\qquad \text{otherwise} \Rightarrow 0 \\
\qquad\qquad\quad \text{end} \\
\qquad\qquad \text{otherwise} \Rightarrow 0 \\
\qquad\quad \text{end.}
\end{array}
$$

Implementácia interpretra (klauzálna forma)

Definícia interpretra pomocou vnorenej dvojitej rekurzie:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Z} \bullet x &= 0 \\
\boldsymbol{S} \bullet x &= x + 1 \\
\boldsymbol{I}^n_i \bullet x &= [x]^n_i \\
\langle g, gs \rangle \bullet x &= \big\langle g \bullet x, gs \bullet x \big\rangle \\
\boldsymbol{Comp}^n_m(h, gs) \bullet x &= h \bullet (gs \bullet x) \\
\boldsymbol{Rec}_n(g, h) \bullet \langle 0, y \rangle &= g \bullet y \\
\boldsymbol{Rec}_n(g, h) \bullet \langle x + 1, y \rangle &= h \bullet \big\langle x, \boldsymbol{Rec}_n(g, h) \bullet \langle x, y \rangle, y \big\rangle.
\end{aligned}
$$

Podmienky regularity pre funkciu $e \bullet x$ sú triviálne splnené, napr.

$$
\begin{aligned}
\big(\boldsymbol{Rec}_n(g, h), \langle x, y \rangle\big) &<_{\mathrm{lex}} \big(\boldsymbol{Rec}_n(g, h), \langle x + 1, y \rangle\big) \\
\big(h, \big\langle x, \boldsymbol{Rec}_n(g, h) \bullet \langle x, y \rangle, y \big\rangle\big) &<_{\mathrm{lex}} \big(\boldsymbol{Rec}_n(g, h), \langle x + 1, y \rangle\big).
\end{aligned}
$$

Definícia univerzálnej funkcie

Vravíme, že $(n+1)$-árna funkcia U_n je univerzálnou pre triedu n-árnych p.r. funkcií, ak sú splnené tieto podmienky:

- Pre každú n-árnu p.r. funkciu f existuje číslo e také, že pre každú n-ticu čísel $x_1, \dots, x_n$ platí rovnosť
$$U_n(e, x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n).$$
- Pre každé číslo e je n-árna funkcia f definovaná vzťahom
$$f(x_1, \dots, x_n) = U_n(e, x_1, \dots, x_n)$$
primitívne rekurzívna.

Funkciu U_n definujeme predpisom
$$U_n(e, x_1, \dots, x_n) = e \bullet \langle x_1, \dots, x_n \rangle.$$

Definícia univerzálnej funkcie

Vravíme, že $(n+1)$-árna funkcia U_n je univerzálnou pre triedu n-árnych p.r. funkcií, ak sú splnené tieto podmienky:

- Pre každú n-árnu p.r. funkciu f existuje číslo e také, že pre každú n-ticu čísel $x_1, \ldots, x_n$ platí rovnosť

$$U_n(e, x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

- Pre každé číslo e je n-árna funkcia f definovaná vzťahom

$$f(x_1, \ldots, x_n) = U_n(e, x_1, \ldots, x_n)$$

  primitívne rekurzívna.

Funkciu U_n definujeme predpisom

$$U_n(e, x_1, \ldots, x_n) = e \bullet \langle x_1, \ldots, x_n \rangle.$$

Univerzálna funkcia U_1 nie je primitívne rekurzívna

Dôkaz sporom: predpokladajme, že funkcia U_1 je primitívne rekurzívna. Potom aj unárna funkcia f definovaná vzťahom

$$f(x) = U_1(x, x) + 1 \tag{1}$$

je primitívne rekurzívna. Existuje teda číslo e také, že pre každé číslo x platí rovnosť

$$U_1(e, x) = f(x). \tag{2}$$

Postupnými úpravami teraz dostaneme

$$f(e) \overset{(1)}{=} U_1(e, e) + 1 \overset{(2)}{=} f(e) + 1.$$

Spor.

Univerzálna funkcia U_n nie je primitívne rekurzívna

Dôkaz sporom: predpokladajme, že funkcia U_n je primitívne rekurzívna. Potom aj n-árna funkcia f definovaná vzťahom

$$f(x_1, \dots, x_n) = U_n(x_1, x_1, \dots, x_n) + 1 \tag{1}$$

je primitívne rekurzívna. Existuje teda číslo e také, že pre každú n-ticu čísel $x_1, \dots, x_n$ platí rovnosť

$$U_n(e, x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n). \tag{2}$$

Postupnými úpravami teraz dostaneme

$$f(e, \dots, e) \overset{(1)}{=} U_n(e, e, \dots, e) + 1 \overset{(2)}{=} f(e, \dots, e) + 1.$$

Spor.

Graf univerzálnej funkcie U_1 nie je primitívne rekurzívny

Dôkaz sporom: predpokladajme, že graf univerzálnej funkcie

$$G_1(e, x, y) \leftrightarrow U_1(e, x) = y \tag{1}$$

je p.r. predikát. Potom je primitívne rekurzívny aj unárny predikát

$$P(x) \leftrightarrow G_1(x, x, 0). \tag{2}$$

Existuje teda číslo e také, že pre každé číslo x platí rovnosť

$$U_1(e, x) = P_*(x). \tag{3}$$

Postupnými úpravami teraz dostaneme spor:

$$P(e) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} G_1(e, e, 0) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} U_1(e, e) = 0 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} P_*(e) = 0 \Leftrightarrow \neg P(e).$$

Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie

Graf univerzálnej funkcie U_n nie je primitívne rekurzívny

Dôkaz sporom: predpokladajme, že graf univerzálnej funkcie

$$G_n(e, x_1, \ldots, x_n, y) \leftrightarrow U_n(e, x_1, \ldots, x_n) = y \tag{1}$$

je p.r. predikát. Potom je primitívne rekurzívny aj n-árny predikát

$$P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow G_n(x_1, x_1, \ldots, x_n, 0). \tag{2}$$

Existuje teda číslo e také, že pre každú n-ticu čísel $x_1, \ldots, x_n$ platí

$$U_n(e, x_1, \ldots, x_n) = P_*(x_1, \ldots, x_n). \tag{3}$$

Postupnými úpravami teraz dostaneme spor:

$$P(e, \ldots, e) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} G_n(e, e, \ldots, e, 0) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} U_n(e, e, \ldots, e) = 0 \overset{(3)}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow P_*(e, \ldots, e) = 0 \Leftrightarrow \neg P(e, \ldots, e).$$

Záver

5. cvičenie

- Výsledky s komentárom nájdete v MS Teams.

6. cvičenie

- Začína hneď po prednáške.
- Úlohy odovzdať do MOODLE najneskôr do 18:00 v sobotu tento týždeň.

7. prednáška

- Obecne rekurzívne funkcie.
- μ-Rekurzívne funkcie.
- Efektívne operácie na primitívne rekurzívnych indexoch.

Koniec prednášky