2-AIN-266 Deklaratívne programovanie

Letný semester 2021/22

2. prednáška

Ján Komara

Obsah 2. prednášky

Distančná výučba

Pokyny

- Vypnite si kameru a stlmte si mikrofón.
- Komunikovať je možné počas celej prednášky.
- Ak máte otázku alebo chcete niečo povedať, tak zdvihnite ruku.
- Po vyzvaní zapnite si mikrofón.
- Po skončení ruku zložte a stlmte si mikrofón.
- Prezentácia je nahrávaná.
- Nahrávku z prednášky nájdete v tejto sekcii.
- Slajdy z prednášky nájdete pod položkou Súbory/Files.

Cieľ a obsah predmetu

Cieľ predmetu

- Vybudovať matematické základy deklaratívnych programovacích jazykov.

Stručná osnova predmetu

- Primitívne rekurzívne funkcie
  - Aritmetizácia dátových štruktúr.
  - Regulárne rekurzívne definície s mierou.
- Obecne rekurzívne funkcie
  - Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií:
    - Ackermannova funkcia (1928),
    - univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie.
- Čiastočne rekurzívne funkcie
  - Kleeneho prvá veta o rekurzii (veta o pevnom bode).
  - Kleeneho veta o normálnej forme.
  - Churchova téza a algoritmicky nerozhodnuteľné problémy.

Cieľ a obsah predmetu

Primitívne rekurzívne funkcie

- Základný vývoj primitívne rekurzívnych funkcií.
- Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia.
- Párovacia funkcia a aritmetizácia dátových štruktúr.
- Vnorená jednoduchá rekurzia:

$$\begin{aligned} f(0,y) &= g(y) \\ f(x+1,y) &= h\Big(x, f\big(x, s_1(x,y)\big), f\big(x, s_2(x,y,f(x,s_1(x,y)))\big), y\Big). \end{aligned}$$

- Regulárne rekurzívne definície s mierou:

$$f(\vec{x}) = \tau[f;\vec{x}].$$

  Podmienka regularity $\Gamma_{f(\vec{\rho})} \to \mu[\vec{\rho}] < \mu[\vec{x}]$ pre rekurzívne volanie $f(\vec{\rho})$ funkcie f v terme τ.

Primitívne rekurzívne funkcie

- Základné funkcie:
  - konštantná funkcia $\mathrm{Z}(x) = 0$,
  - funkcia nasledovníka $\mathrm{S}(x) = x + 1$,
  - identity (projekcie):

    $$\mathrm{I}_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$$

    pre každé $1 \leq i \leq n$.
- Kompozícia (skladanie) funkcií:

  $$f(x_1, \ldots, x_n) = h\big(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)\big).$$

- Primitívna rekurzia:

  $$\begin{aligned} f(0, y_1, \ldots, y_n) &= g(y_1, \ldots, y_n) \\ f\big(\mathrm{S}(x), y_1, \ldots, y_n\big) &= h\big(x, f(x, y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n\big). \end{aligned}$$

Primitívne rekurzívne funkcie

Primitívne rekurzívne odvodenia

$$h(x,z,y) = \mathsf{S}\,\mathsf{I}^3_2(x,z,y)$$

$$\begin{aligned} 0 + y &= y & 0 + y &= \mathsf{I}(y) \\ x + 1 + y &= x + y + 1 & \mathsf{S}(x) + y &= h(x, x+y, y) \end{aligned}$$

$$h_2(x,z,y) = \mathsf{I}^3_2(x,z,y) + \mathsf{I}^3_3(x,z,y)$$

$$\begin{aligned} 0 \cdot y &= 0 & 0 \cdot y &= \mathsf{Z}(y) \\ (x+1) \cdot y &= x \cdot y + y & \mathsf{S}(x) \cdot y &= h_2(x, x \cdot y, y) \end{aligned}$$

$$\mathsf{C}_1(x) = \mathsf{S}\,\mathsf{Z}(x)$$

$$h_3(y,z,x) = \mathsf{I}^3_3(y,z,x) \cdot \mathsf{I}^3_2(y,z,x)$$

$$\begin{aligned} x^0 &= 1 & f(0,x) &= \mathsf{C}_1(x) \\ x^{y+1} &= x \cdot x^y & f(\mathsf{S}(y),x) &= h_3(y, f(y,x), x) \end{aligned}$$

$$x^y = f(\mathsf{I}^2_2(x,y), \mathsf{I}^2_1(x,y))$$

Primitívne rekurzívne funkcie

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na operátor kompozície funkcií a primitívnej rekurzie.

Dôkaz.

Čo treba dokázať?

- Ak $h, g_1, \ldots, g_m$ sú p.r. funkcie, potom aj ich kompozícia

  $$f(x_1, \ldots, x_n) = h\big(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)\big)$$

  je p.r. funkcia.
- Ak g, h sú p.r. funkcie, potom aj ich primitívna rekurzia

  $$\begin{aligned} f(0, y_1, \ldots, y_n) &= g(y_1, \ldots, y_n) \\ f\big(\mathrm{S}(x), y_1, \ldots, y_n\big) &= h\big(x, f(x, y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n\big). \end{aligned}$$

  je p.r. funkcia.

Primitívne rekurzívne funkcie

Dôkaz ilustrovaný na príklade.

$$h(x,z,y) = \mathsf{S}\,\mathsf{I}^3_2(x,z,y)$$

$$\begin{aligned} 0 + y &= y & \qquad 0 + y &= \mathsf{I}(y) \\ x + 1 + y &= x + y + 1 & \qquad \mathsf{S}(x) + y &= h(x, x + y, y) \end{aligned}$$

$$h_2(x,z,y) = \mathsf{I}^3_2(x,z,y) + \mathsf{I}^3_3(x,z,y)$$

$$\begin{aligned} 0 \cdot y &= 0 & \qquad 0 \cdot y &= \mathsf{Z}(y) \\ (x+1) \cdot y &= x \cdot y + y & \qquad \mathsf{S}(x) \cdot y &= h_2(x, x \cdot y, y). \end{aligned}$$

Primitívne rekurzívne funkcie

Definícia

Trieda funkcií je primitívne rekurzívne uzavretá, ak obsahuje základné primitívne rekurzívne funkcie a je uzavretá na operátor kompozície funkcií a primitívnej rekurzie.

Príklady

- Trieda všetkých funkcií je primitívne rekurzívne uzavretá.
- Trieda primitívne rekurzívnych funkcií je p. r. uzavretá.
- Trieda Turingovských vypočítateľných funkcií je p. r. uzavretá.

Lema

Primitívne rekurzívne funkcie sú podmnožinou každej primitívne rekurzívne uzavretej triedy funkcií.

Dôkaz.

Indukciou na dĺžku primitívne rekurzívneho odvodenia.

Primitívne rekurzívne funkcie

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú najmenšia primitívne rekurzívne uzavretá trieda funkcií.

Dôkaz.

Označenie:

$$\begin{aligned}\text{PRIM} &= \text{trieda primitívne rekurzívnych funkcií,}\\ \text{MIN} &= \text{najmenšia primitívne rekurzívne uzavretá trieda funkcií}\\ &= \bigcap\{\mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ je p. r. uzavretá trieda funkcií}\}.\end{aligned}$$

Cieľom je dokázať rovnosť PRIM = MIN.

- Inklúzia PRIM $\subseteq$ MIN je dôsledok lemy.
- Inklúzia PRIM $\supseteq$ MIN plynie s primitívne rekurzívnej uzavretosti triedy PRIM.

Explicitné definície

Konštantné funkcie sú primitívne rekurzívne

- Unárne konštantné funkcie

$$\mathsf{C}_m(x) = m.$$

Primitívna rekurzívnosť C_m pomocou induktívneho argumentu

$$\begin{aligned} \mathsf{C}_0 &= \mathsf{Z} \\ \mathsf{C}_{m+1}(x) &= \mathsf{S}\,\mathsf{C}_m(x). \end{aligned}$$

- Konštantné funkcie z ľubovolným počtom argumentov

$$\mathsf{C}^n_m(x_1, \ldots, x_n) = m.$$

Primitívnu rekurzívnosť C^n_m dostaneme z tohoto vyjadrenia

$$\mathsf{C}^n_m(x_1, \ldots, x_n) = \mathsf{C}_m\,\mathsf{I}^n_1(x_1, \ldots, x_n).$$

Explicitné definície

Explicitné definície funkcií

Sú to definície v tvare

$$f(x_1, \dots, x_n) = \tau[x_1, \dots, x_n].$$

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na explicitné definície.

Dôkaz.

Prekladom explicitnej definície do p.r. odvodenia funkcie f induktívne podľa štruktúry termu τ.

Explicitné definície

Dôkaz ilustrovaný na príklade

Uvažujme takúto explicitnú definíciu z p.r. funckií:

$$f(x, y, z) = g_3\Big(x, g_2(z, g_1(x)), 2\Big).$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned}
h_1(x, y, z) &= g_1\ \mathrm{I}_1^3(x, y, z) \\
&= g_1(x) \\
h_2(x, y, z) &= g_2\big(\mathrm{I}_3^3(x, y, z), h_1(x, y, z)\big) \\
&= g_2\big(z, g_1(x)\big) \\
f(x, y, z) &= g_3\big(\mathrm{I}_1^3(x, y, z), h_2(x, y, z), \mathrm{C}_2^3(x, y, z)\big) \\
&= g_3\Big(x, g_2(z, g_1(x)), 2\Big).
\end{aligned}$$

Explicitné definície

Príklad

Z predchadzajúcej vety plynie, že ternárna funkcia h definovaná nasledujúcim vzťahom je primitívne rekurzívna funkcia:

$$h(x, z, y) = \mathrm{S}(z).$$

Sčítanie je preto tiež primitívne rekurzívna funkcia:

$$\begin{aligned} 0 + y &= \mathrm{I}(y) \\ \mathrm{S}(x) + y &= h(x, x + y, y). \end{aligned}$$

Primitívne rekurzívne definície

Primitívne rekurzívne definície

Sú to definície v tvare

$$f(\vec{y}, 0, \vec{z}) = \rho[\vec{y}, \vec{z}]$$
$$f(\vec{y}, x+1, \vec{z}) = \tau[\vec{y}, x, f(\vec{y}, x, \vec{z}), \vec{z}].$$

Špeciálne prípady:

- Iterácia unárnej funkcie

$$f^0(x) = x$$
$$f^{n+1}(x) = f\, f^n(x).$$

- Explicitná definícia s monadickou diskrimináciou

$$f(\vec{y}, 0, \vec{z}) = \rho[\vec{y}, \vec{z}]$$
$$f(\vec{y}, x+1, \vec{z}) = \tau[\vec{y}, x, \vec{z}].$$

Primitívne rekurzívne definície

Lema

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na primitívne rekurzívne definície s aspoň jedným parametrom.

Dôkaz.

Primitívne rekurzívna definícia s aspoň jedným parametrom $\vec{y}, \vec{z}$:

$$f(\vec{y}, 0, \vec{z}) = \rho[\vec{y}, \vec{z}] \qquad f(\vec{y}, x+1, \vec{z}) = \tau[\vec{y}, x, f(\vec{y}, x, \vec{z}), \vec{z}].$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned}
g(\vec{y}, \vec{z}) &= \rho[\vec{y}, \vec{z}] \\
h(x, a, \vec{y}, \vec{z}) &= \tau[\vec{y}, x, a, \vec{z}] \\
f_1(0, \vec{y}, \vec{z}) &= g(\vec{y}, \vec{z}) \\
f_1(\mathrm{S}(x), \vec{y}, \vec{z}) &= h(x, f_1(x, \vec{y}, \vec{z}), \vec{y}, \vec{z}) \\
f(\vec{y}, x, \vec{z}) &= f_1(x, \vec{y}, \vec{z}).
\end{aligned}$$

Primitívne rekurzívne definície

Lema

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na bezparametrické primitívne rekurzívne definície.

Dôkaz.

Bezparametrická primitívne rekurzívna definícia unárnej funkcie:

$$
\begin{aligned}
f(0) &= \rho \\
f(x+1) &= \tau[x, f(x)].
\end{aligned}
$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie f plynie podľa predošlej lemy z tohoto vyjadrenia

$$
\begin{aligned}
f_1(0, w) &= \rho \\
f_1(x+1, w) &= \tau[x, f_1(x, w)] \\
f(x) &= f_1(x, 0).
\end{aligned}
$$

Primitívne rekurzívne definície

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na primitívne rekurzívne definície.

Dôsledok

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na operátor iterácie unárnych funkcií:

$$f^0(x) = x \qquad\qquad f^{n+1}(x) = f\, f^n(x).$$

Dôsledok

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na explicitné definície funkcií s monadickou diskrimináciou:

$$f(\vec{y}, 0, \vec{z}) = \rho[\vec{y}, \vec{z}] \qquad\qquad f(\vec{y}, x+1, \vec{z}) = \tau[\vec{y}, x, \vec{z}].$$

Primitívne rekurzívne definície

Príklady primitívne rekurzívnych funkcií

Násobenie

$$0 \cdot y = 0 \qquad (x+1) \cdot y = x \cdot y + y.$$

Umocňovanie

$$x^0 = 1 \qquad x^{y+1} = x \cdot x^y.$$

Sumačná funkcia

$$\sum_{i=0}^{0} i = 0 \qquad \sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{n} i + n + 1.$$

Primitívne rekurzívne definície

Modifikované odčítanie

Definícia

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y & \text{ak } x \geq y, \\ 0 & \text{ak } x \leq y. \end{cases}$$

Príklady primitívne rekurzívnych funkcií

Funkcia predchodcu

$$0 \dot{-} 1 = 0 \qquad\qquad x + 1 \dot{-} 1 = x.$$

Modifikované odčítanie

$$x \dot{-} 0 = x \qquad\qquad x \dot{-} (y + 1) = x \dot{-} y \dot{-} 1.$$

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Charakteristická funkcia predikátu

Charakteristická funkcia n-árneho predikátu P je n-árna funkcia P_* definovaná predpisom

$$P_*(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{ak platí } P(x_1, \ldots, x_n), \\ 0 & \text{ak neplatí } P(x_1, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Notačná konvencia $x \; P_* \; y$ pre binárne predikáty s infixovou notáciou. Napr. $x =_* y$, $x \leq_* y$.

Primitívne rekurzívne predikáty

Predikát je primitívne rekurzívny, ak jeho charakteristická funkcia je primitívne rekurzívna funkcia.

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Jazyk formúl

Tvrdenia tvoríme z atomických formúl pomocou logických spojok a kvantifikátorov:

$$
\begin{aligned}
&\neg\varphi && \text{(negácia)}\\
&\varphi \wedge \psi && \text{(konjunkcia)}\\
&\varphi \vee \psi && \text{(disjunkcia)}\\
&\varphi \to \psi && \text{(implikácia)}\\
&\varphi \leftrightarrow \psi && \text{(ekvivalencia)}\\
&\forall x \varphi && \text{(univerzálny kvantifikátor)}\\
&\exists x \varphi && \text{(existenčný kvantifikátor)}\\
&\forall x \leq \tau\, \varphi \equiv \forall x (x \leq \tau \to \varphi) && \text{(ohraničený kvantifikátor)}\\
&\exists x \leq \tau\, \varphi \equiv \exists x (x \leq \tau \wedge \varphi) && \text{(ohraničený kvantifikátor)}
\end{aligned}
$$

Ohraničená formula obsahuje len ohraničené kvantifikátory.

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Notačné konvencie pri zápise formúl

Od najvyššej priority k najmenšej:

- kvantifikátory,
- negácia,
- konjunkcia,
- disjunkcia,
- implikácia a ekvivalencia.

Príklad

Zadanie formuly v úplnej notácií

$$(\varphi_1 \to (\varphi_2 \leftrightarrow ((\neg\varphi_3) \vee ((\exists x \varphi_4) \wedge \varphi_5)))).$$

Jej skrátený zápis

$$\varphi_1 \to \varphi_2 \leftrightarrow \neg\varphi_3 \vee \exists x \varphi_4 \wedge \varphi_5.$$

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Explicitné definície predikátov

Sú to definície v tvare

$$P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi[x_1, \ldots, x_n].$$

Nás zaujíma hlavne prípad, keď φ je ohraničená formula.

Príklad

Explicitná definícia predikátu deliteľnosti

$$x \mid y \leftrightarrow \exists z\, y = x{\cdot}z.$$

Iná definícia tentokrát s ohraničenou formulou

$$x \mid y \leftrightarrow \exists z \leq y\; y = x{\cdot}z.$$

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Ohraničená minimalizácia

Sú to definície v tvare (φ je ohraničená formula)

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \text{najmenšie číslo } y \leq \tau[x_1, \ldots, x_n] \text{ také, že platí} \\ \qquad\qquad\qquad \varphi[x_1, \ldots, x_n, y]; \\ 0, \text{ ak také číslo neexistuje.} \end{cases}$$

Skrátený zápis $f(\vec{x}) = \mu y \leq \tau[\vec{x}]\big[\varphi[\vec{x}, y]\big]$.

Príklad

Neúplný podiel

$$x \div y = q \leftrightarrow y = 0 \land q = 0 \lor y \neq 0 \land \exists r(x = q \cdot y + r \land r < y).$$

Iná definícia tentokrát ohraničenou minimalizáciou

$$x \div y = \mu q \leq x[x < (q+1) \cdot y].$$

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Diskriminačná funkcia je primitívne rekurzívna

Ternárna diskriminačná funkcia D je definovaná predpisom

$$\mathrm{D}(x,y,z) = v \leftrightarrow x \neq 0 \wedge v = y \vee x = 0 \wedge v = z.$$

Notačná konvencia

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) &\equiv \text{if } \tau_1 \neq 0 \text{ then } \tau_2 \text{ else } \tau_3 \\ \mathrm{D}\big(P_*(\vec{\tau}_1),\tau_2,\tau_3\big) &\equiv \text{if } P(\vec{\tau}_1) \text{ then } \tau_2 \text{ else } \tau_3. \end{aligned}$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie D plynie z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(0,y,z) &= z \\ \mathrm{D}(x+1,y,z) &= y. \end{aligned}$$

Je to explicitná definícia s monadickou diskrimináciou.

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Rovnosť je primitívne rekurzívny predikát

Pretože $x = y \leftrightarrow x \dot{-} y + (y \dot{-} x) = 0$, primitívna rekurzívnosť funkcie $x =_* y$ plynie z tohoto vyjadrenia

$$(x =_* y) = \mathrm{D}\big(x \dot{-} y + (y \dot{-} x), 0, 1\big).$$

Boolovské funkcie sú primitívne rekurzívne

Základné boolovské funkcie

$$\begin{aligned}(\neg_* x) = y &\leftrightarrow x \neq 0 \wedge y = 0 \vee x = 0 \wedge y = 1\\ (x \wedge_* y) = z &\leftrightarrow x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z = 1 \vee (x = 0 \vee y = 0) \wedge z = 0.\end{aligned}$$

Primitívna rekurzívnosť bool. funkcií plynie z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned}(\neg_* x) &= \mathrm{D}(x, 0, 1)\\ (x \wedge_* y) &= \mathrm{D}\big(x, \mathrm{D}(y, 1, 0), 0\big).\end{aligned}$$

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Operátor ohraničenej minimalizácie

Je to definícia v tvare

$$f(x, \vec{y}) = \mu z \leq x\, [g(z, \vec{y}) = 1].$$

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na operátor ohraničenej minimalizácie.

Dôkaz.

Primitívna rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$f(0, \vec{y}) = 0$$

$$f(x+1, \vec{y}) = \begin{cases} f(x, \vec{y}) & \text{ak } g\big(f(x, \vec{y}), \vec{y}\big) = 1, \\ x+1 & \text{ak } g\big(f(x, \vec{y}), \vec{y}\big) \neq 1 \text{ a } g(x+1, \vec{y}) = 1, \\ 0 & \text{ináč.} \end{cases}$$

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Veta

Primitívne rekurzívne predikáty sú uzavreté na explicitné definície predikátov s ohraničenými formulami.

Dôkaz.

Explicitná definícia predikátu s ohraničenou formulou:

$$P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi[x_1, \ldots, x_n].$$

Primitívna rekurzívnosť predikátu P_* plynie z tohoto vyjadrenia

$$P_*(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_*[x_1, \ldots, x_n].$$

Tu φ_* je charakteristický term formuly φ:

$$(\varphi \rightarrow \varphi_* = 1) \land (\neg\varphi \rightarrow \varphi_* = 0).$$

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Konštrukcia φ_* induktívne podľa štruktúry formuly φ

- Nekvantifikátorová formula

$$\begin{aligned}(\rho = \tau)_* &\equiv (\rho =_* \tau)\\ (R(\vec{\tau}))_* &\equiv R_*(\vec{\tau})\\ (\neg\psi)_* &\equiv (\neg_*\psi_*)\\ (\psi \wedge \chi)_* &\equiv (\psi_* \wedge_* \chi_*).\end{aligned}$$

- Formula z ohraničeným kvantifikátorom

$$\begin{aligned}g(y, \vec{x}) &= \psi_*[\vec{x}, y]\\ f(z, \vec{x}) &= \mu y \leq z\big[g(y, \vec{x}) = 1\big]\\ (\exists y \leq \tau[\vec{x}]\, \psi[\vec{x}, y])_* &\equiv \psi_*\Big[\vec{x}, f(\tau[\vec{x}], \vec{x})\Big]\end{aligned}$$

Symbolicky $(\exists y \leq \tau\, \psi[y])_* \equiv \psi_*\Big[\mu y \leq \tau\big[\psi_*[y] = 1\big]\Big]$.

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Dôsledok

Nerovnosti sú primitívne rekurzívne predikáty.

Dôkaz.

Primitívna rekurzívnosť predikátov plynie z tohoto vyjadrenia

$$x \leq y \leftrightarrow \exists z \leq y \, x = z$$
$$x < y \leftrightarrow y \not\leq x$$
$$x \geq y \leftrightarrow y \leq x$$
$$x > y \leftrightarrow y < x.$$

Poznámka

Pretože platí ekvivalencia $x \leq y \leftrightarrow x \dot{-} y = 0$, primitívna rekurzívnosť funkcie $x \leq_* y$ plynie tiež z tohoto vyjadrenia

$$(x \leq_* y) = \mathrm{D}(x \dot{-} y, 0, 1).$$

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na definície funkcií ohraničenou minimalizáciou.

Dôkaz.

Definícia funkcie ohraničenou minimalizáciou:

$$f(\vec{x}) = \mu y \le \tau[\vec{x}]\big[\varphi[\vec{x}, y]\big].$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned} P(y, \vec{x}) &\leftrightarrow \varphi[\vec{x}, y] \\ g(z, \vec{x}) &= \mu y \le z[P_*(y, \vec{x}) = 1] \\ f(\vec{x}) &= g(\tau[\vec{x}], \vec{x}). \end{aligned}$$

Záver

1. cvičenie

- Výsledky s komentárom nájdete v MS Teams.

2. cvičenie

- Začne hneď po prednáške.
- Úlohy odovzdať do MOODLE najneskôr do 18:00 v sobotu tento týždeň.

3. prednáška

- Párovacia funkcia a aritmetizácia dátových štruktúr.
- Rekurzia so substitúciou v parametri.

Koniec prednášky