1-INF-450 Logika pre informatikov

Zimný semester 2014/15

13. prednáška

Ján Komara

Obsah 12. prednášky

Zopakovanie

Cieľ predmetu

- Vybudovať matematické základy deklaratívnych programovacích jazykov.

Stručná osnova predmetu

- Primitívne rekurzívne funkcie
  - Aritmetizácia dátových štruktúr.
  - Regulárne rekurzívne definície s mierou.
- Obecne rekurzívne funkcie
  - Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií:
    - Ackermannova funkcia (1928),
    - univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie.
- Čiastočne rekurzívne funkcie
  - Kleeneho prvá veta o rekurzii (veta o pevnom bode).
  - Kleeneho veta o normálnej forme.
  - Churchova téza a algoritmicky nerozhodnuteľné problémy.

Zopakovanie

Rekurzívne indexy

Symbolom $\varphi_e^{(n)}$ označujeme n-árnu čiastočne rekurzívnu funkciu definovanú predpisom

$$\varphi_e^{(n)} = \begin{cases} f & \text{ak } e = \ulcorner f \urcorner \text{ pre nejaký } n\text{-árny rek. fun. symbol } f, \\ \emptyset^{(n)} & \text{ináč.} \end{cases}$$

Ak $f = \varphi_e^{(n)}$, tak číslo e nazveme rekurzívnym indexom čiastočnej funkcie f. Čísla v tvare $\ulcorner f \urcorner$ sú dobre vytvorené indexy.

Enumeračná čiastočná funkcia

Symbolom Ψ_n si označíme $(n+1)$-árnu čiastočnú funkciu:

$$\Psi_n(e, x_1, \ldots, x_n) \simeq \varphi_e^{(n)}(x_1, \ldots, x_n).$$

Z dôkazu Kleeneho vety o normálnej forme vyplýva, že

$$\Psi_n(e, x_1, \ldots, x_n) \simeq \mathrm{U}\, \mu s[\mathrm{T}_n(e, x_1, \ldots, x_n, s)].$$

Zopakovanie

Veta o enumerácií (Kleene)

Pre každé $n \geq 1$, čiastočná funkcia Ψ_n je čiastočne rekurzívna funkcia, ktorá enumeruje (s opakovaním) triedu n-árnych čiastočne rekurzívnych funkcií, t. j. postupnosť

$$\lambda x_1 \ldots x_n \,.\, \Psi_n(e, x_1, \ldots, x_n) \qquad \text{pre } e = 0, 1, 2, \ldots$$

je enumerácia triedy n-árnych čiastočne rekurzívnych funkcií.

Veta

Zúplnenie enumeračnej čiastočnej funkcie nie je rekurzívna funkcia.

Veta

Graf enumeračnej čiastočnej funkcie nie je rekurzívny predikát.

Zopakovanie

Churchova téza (1936)

Trieda intuitívne vypočítateľných funkcií nad oborom prirodzených čísel je totožná s triedou obecne rekurzívnych funkcií.

Turingova téza (1936-1937)

Trieda intuitívne vypočítateľných funkcií nad oborom prirodzených čísel je totožná s triedou funkcií vypočítateľných na Turingových strojoch.

Modely (čiastočne) vypočítateľných funkcií

- obecne rekurzívne funkcie [Herbrand-Gödel, 1931, 1934],
- λ-definovateľné funkcie [Church, 1932],
- (čiastočne) μ-rekurzívne funkcie [Kleene, 1935, 1952],
- Turingove stroje [Turing, 1936-1937],
- čiastočne rekurzívne funkcie [Kleene, 1952],
- registrové stroje [napr. Minsky, 1961].

Nerozhodnuteľné problémy

Problém zastavenia

Aritmetizácia problému zastavenia pre n-árne čiastočne rekurzívne funkcie je $(n+1)$-árny predikát definovaný predpisom

$$\mathrm{W}_e^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi_e^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)\downarrow .$$

Veta

Problém zastavenia pre n-árne čiastočne rekurzívne funkcie je nerozhodnuteľný problém.

Dôkaz.

V opačnom prípade by takéto zúplnenie enumeračnej čiastočnej funkcie Ψ_n bola rekurzívna funkcia:

$$f(e, x_1, \ldots, x_n) \simeq \begin{cases} \varphi_e^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) & \text{ak } \varphi_e^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)\downarrow, \\ 0 & \text{ak } \varphi_e^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)\uparrow. \end{cases}$$

Nerozhodnuteľné problémy

Problém zastavenia

Aritmetizácia problému zastavenia pre n-árne čiastočne rekurzívne funkcie je $(n+1)$-árny predikát definovaný predpisom

$$\mathrm{W}_e^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi_e^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)\downarrow .$$

Veta

Problém zastavenia pre n-árne čiastočne rekurzívne funkcie je nerozhodnuteľný problém.

Dôkaz.

V opačnom prípade by takéto zúplnenie enumeračnej čiastočnej funkcie Ψ_n bola rekurzívna funkcia:

$$f(e, x_1, \ldots, x_n) \simeq \textbf{if } \mathrm{W}_e^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) \textbf{ then } \Psi_n(e, x_1, \ldots, x_n) \textbf{ else } 0.$$

Nerozhodnuteľné problémy

Veta

Problém zastavenia pre enumeračnú čiastočnú funkciu je nerozhodnuteľný problém.

Dôkaz.

Nech e_n je rekurzívny index enumeračnej čiastočnej funkcie Ψ_n:

$$\Psi_n(e, x_1, \ldots, x_n) \simeq \Psi_{n+1}(e_n, e, x_1, \ldots, x_n).$$

Čiže

$$\varphi_e^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)\downarrow \leftrightarrow \varphi_{e_n}^{(n+1)}(e, x_1, \ldots, x_n)\downarrow .$$

Odtiaľ dostaneme

$$\mathrm{W}_e^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \mathrm{W}_{e_n}^{(n+1)}(e, x_1, \ldots, x_n).$$

Z rozhodnuteľnosti problému zastavenia pre Ψ_n by sme dostali rozhodnuteľnosť všeobecného problému zastavenia.

Polorozhodnuteľné problémy

Čiastočne rekurzívne predikáty

n-árny predikát P je čiastočne rekurzívny, ak existuje n-árna čiastočne rekurzívna funkcia f taká, že

$$P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow f(x_1, \ldots, x_n)\downarrow .$$

Príklady

- Každý n-árny rekurzívny predikát P je čiastočne rekurzívny:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \textbf{if } P(x_1, \ldots, x_n) \textbf{ then } 1 \textbf{ else } \emptyset^{(n)}(x_1, \ldots, x_n).$$

- Aritmetizácia problému zastavenia pre n-árne čiastočne rekurzívne funkcie je $(n+1)$-árny čiastočne rekurzívny predikát:

$$\mathrm{W}_e^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \Psi_n(e, x_1, \ldots, x_n)\downarrow .$$

Polorozhodnuteľné problémy

Čiastočne rekurzívne predikáty

n-árny predikát P je čiastočne rekurzívny, ak existuje n-árna čiastočne rekurzívna funkcia f taká, že

$$P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow f(x_1, \ldots, x_n)\downarrow .$$

Príklady

- Každý n-árny rekurzívny predikát P je čiastočne rekurzívny:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mu y[P(x_1, \ldots, x_n)].$$

- Aritmetizácia problému zastavenia pre n-árne čiastočne rekurzívne funkcie je $(n+1)$-árny čiastočne rekurzívny predikát:

$$\mathrm{W}_e^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \Psi_n(e, x_1, \ldots, x_n)\downarrow .$$

Polorozhodnuteľné problémy

Veta o normálnej forme (Kleene)

Pre každý n-árny čiastočne rekurzívny predikát P existuje číslo e také, že pre všetky čísla $x_1, \ldots, x_n$ platí vzťah

$$P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \exists s \, \mathrm{T}_n(e, x_1, \ldots, x_n, s)$$

Dôkaz.

Nech f je n-árna čiastočne rekurzívna funkcia taká, že

$$P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow f(x_1, \ldots, x_n)\downarrow .$$

Z Kleeneho vety o normálnej forme pre n-árne čiastočne rekurzívne funkcie plynie, že existuje číslo e také, že

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mathrm{U}\, \mu s[\mathrm{T}_n(e, x_1, \ldots, x_n, s)].$$

Polorozhodnuteľné problémy

Veta o normálnej forme (Kleene)

Pre každý n-árny čiastočne rekurzívny predikát P existuje číslo e také, že pre všetky čísla $x_1, \ldots, x_n$ platí vzťah

$$P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \exists s \, \mathrm{T}_n(e, x_1, \ldots, x_n, s)$$

Dôkaz.

Nech f je n-árna čiastočne rekurzívna funkcia taká, že

$$P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow f(x_1, \ldots, x_n)\downarrow .$$

Z Kleeneho vety o normálnej forme pre n-árne čiastočne rekurzívne funkcie plynie, že existuje číslo e také, že

$$f(x_1, \ldots, x_n)\downarrow \leftrightarrow \exists s \, \mathrm{T}_n(e, x_1, \ldots, x_n, s).$$

Polorozhodnuteľné problémy

Veta (Post)

Predikát je rekurzívny práve vtedy, keď on a jeho negácia sú čiastočne rekurzívne predikáty.

Dôkaz.

Nech n-árny predikát P a jeho negácia sú čiastočne rekurzívne. Z vety o normálnej forme plynie, že existujú čísla e_1, e_2 také, že

$$P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \exists s \, \mathrm{T}_n(e_1, x_1, \ldots, x_n, s)$$
$$\neg P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \exists s \, \mathrm{T}_n(e_2, x_1, \ldots, x_n, s).$$

Regulárna minimalizácia definuje n-árnu rekurzívnu funkciu f:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu s[\mathrm{T}_n(e_1, x_1, \ldots, x_n, s) \vee \mathrm{T}_n(e_2, x_1, \ldots, x_n, s)].$$

Rekurzívnosť predikátu P plynie z tohoto vyjadrenia

$$P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \mathrm{T}_n\big(e_1, x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)\big).$$

Polorozhodnuteľné problémy

Projekcie rekurzívnych predikátov

Nech R je $(n+1)$-árny rekurzívny predikát a nech P je n-árny predikát definovaný predpisom

$$P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \exists y \, R(y, x_1, \ldots, x_n).$$

Vravíme, že predikát P vznikol (existenčnou) projekciou rekurzívneho predikátu R.

Rekurzívne spočítateľné predikáty

n-árny predikát P je rekurzívne spočítateľný, ak jeho obor pravdivosti je prázdna množina alebo ak existuje unárna rekurzívna funkcia f taká, že

$$P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \exists y \, f(y) = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle.$$

Vravíme, že funkcia f enumeruje predikát P.

Polorozhodnuteľné problémy

Veta

Nech P je n-árny predikát. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- *P je čiastočne rekurzívny predikát.*
- *P je projekcia rekurzívneho predikátu.*
- *P je rekurzívne spočítateľný predikát.*

Dôkaz.

Znenie vety plynie z nasledujúcich troch pomocných tvrdení.

Polorozhodnuteľné problémy

Lema

Každý čiastočne rekurzívny predikát je projekciou rekurzívneho predikátu.

Dôkaz.

Nech P je n-árny čiastočne rekurzívny predikát. Z Kleeneho vety o normálnej forme plynie, že existuje číslo e také, že

$$P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \exists s \, \mathrm{T}_n(e, x_1, \ldots, x_n, s).$$

Nasledujúci vzťah definuje $(n+1)$-árny rekurzívny predikát R:

$$R(s, x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \mathrm{T}_n(e, x_1, \ldots, x_n, s).$$

Predikát P je tak projekciou rekurzívneho predikátu

$$P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \exists s \, R(s, x_1, \ldots, x_n).$$

Polorozhodnuteľné problémy

Lema

Každá projekcia rekurzívneho predikátu je rekurzívne spočítateľný predikát.

Dôkaz.

Nech R je $(n+1)$-árny rekurzívny predikát a nech P je jeho projekcia:

$$P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \exists y \, R(y, x_1, \ldots, x_n)$$

Predpokladajme, že predikát P platí pre čísla $a_1, \ldots, a_n$. Uvažujme unárnu funkciu f definovanú vzťahom

$$f(z) = \begin{cases} \langle x_1, \ldots, x_n \rangle & \text{ak pre nejaké čísla } y, x_1, \ldots, x_n \text{ platí} \\ & z = \langle y, x_1, \ldots, x_n \rangle \text{ a } R(y, x_1, \ldots, x_n), \\ \langle a_1, \ldots, a_n \rangle & \text{ináč.} \end{cases}$$

f je rekurzívna funkcia, ktorá enumeruje predikát P:

$$P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \exists z \, f(z) = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle.$$

P je preto rekurzívne spočítateľný predikát.

Polorozhodnuteľné problémy

Lema

Každá projekcia rekurzívneho predikátu je rekurzívne spočítateľný predikát.

Dôkaz.

Nech R je $(n+1)$-árny rekurzívny predikát a nech P je jeho projekcia:

$$P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \exists y \, R(y, x_1, \ldots, x_n)$$

Predpokladajme, že predikát P platí pre čísla $a_1, \ldots, a_n$. Uvažujme unárnu funkciu f definovanú vzťahom

$$\langle R \rangle(z) \leftrightarrow R([z]_1^{n+1}, [z]_2^{n+1}, \ldots, [z]_{n+1}^{n+1})$$

$$f(z) = \textbf{if } \mathit{Tuple}(n+1, z) \wedge \langle R \rangle(z) \textbf{ then } \pi_2(z) \textbf{ else } \langle a_1, \ldots, a_n \rangle.$$

f je rekurzívna funkcia, ktorá enumeruje predikát P:

$$P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \exists z \, f(z) = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle.$$

P je preto rekurzívne spočítateľný predikát.

Polorozhodnuteľné problémy

Lema

Každý rekurzívne spočítateľný predikát je čiastočne rekurzívny predikát.

Dôkaz.

Nech f je unárna rekurzívna funkcia, ktorá enumeruje n-árny predikát P:

$$P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \exists y\, f(y) = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle.$$

Potom neohraničená minimalizácia

$$g(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mu y[f(y) = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle]$$

definuje čiastočne rekurzívnu funkcia g takú, že

$$P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow g(x_1, \ldots, x_n)\downarrow .$$

Turingova úplnosť a totálne funkcionálne programovanie

Uniformný problém zastavenia

Aritmetizácia uniformného problému zastavenia pre n-árne čiastočne rekurzívne funkcie je unárny predikát definovaný predpisom

$$\mathrm{Tot}_n(e) \leftrightarrow \forall x_1 \cdots \forall x_n \, \varphi_e^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)\downarrow .$$

Veta

Uniformný problém zastavenia pre n-árne čiastočne rekurzívne funkcie nie je ani polorozhodnuteľný problém.

Dôkaz.

Tvrdenie je dôsledok nasledujúcej lemy, ktorá je sformulovaná a dokázaná pre prípad $n = 1$.

Turingova úplnosť a totálne funkcionálne programovanie

Uniformný problém zastavenia

Aritmetizácia uniformného problému zastavenia pre n-árne čiastočne rekurzívne funkcie je unárny predikát definovaný predpisom

$$\mathrm{Tot}_n(e) \leftrightarrow \forall x_1 \cdots \forall x_n \mathrm{W}_e^{(n)}(x_1, \ldots, x_n).$$

Veta

Uniformný problém zastavenia pre n-árne čiastočne rekurzívne funkcie nie je ani polorozhodnuteľný problém.

Dôkaz.

Tvrdenie je dôsledok nasledujúcej lemy, ktorá je sformulovaná a dokázaná pre prípad $n = 1$.

Turingova úplnosť a totálne funkcionálne programovanie

Lema (prípad $n = 1$)

Nech P je predikát taký, že $\forall e\big(P(e) \to \mathrm{Tot}(e)\big)$. Ak P je čiastočne rekurzívny predikát, potom $\{\varphi_e \mid P(e)\} \subset \{\varphi_e \mid \mathrm{Tot}(e)\}$.

Dôkaz.

Existuje rek. fcia k taká, že $\{e \mid P(e)\} = \{k(0), k(1), k(2), \ldots\}$. Preto $\{\varphi_e \mid P(e)\} = \{\varphi_{k(0)}, \varphi_{k(1)}, \varphi_{k(2)}, \ldots\}$. Nasledujúci vzťah definuje unárnu čiastočne rekurzívnu funkciu f:

$$f(x) \simeq \Psi\big(k(x), x\big) + 1.$$

Pretože $\varphi_{k(x)}(x)\downarrow$, f je totálna. Z definície plynie tiež

$$f(x) = \varphi_{k(x)}(x) + 1 \neq \varphi_{k(x)}(x) \quad \text{t.j.} \quad f \neq \varphi_{k(x)}$$

pre každé x. Odtiaľ dostaneme

$$f \notin \{\varphi_e \mid P(e)\} \qquad f \in \{\varphi_e \mid \mathrm{Tot}(e)\}.$$

Turingova úplnosť a totálne funkcionálne programovanie

Euklidov algoritmus pre výpočet najväčšieho spoločného deliteľa

Implementácia

$$
\begin{aligned}
\gcd(x, y) = \textbf{if } & x \neq 0 \wedge y \neq 0 \textbf{ then} \\
& \textbf{case} \\
& \quad x > y \Rightarrow \gcd(x \dot{-} y, y) \\
& \quad x = y \Rightarrow x \\
& \quad x < y \Rightarrow \gcd(x, y \dot{-} x) \\
& \textbf{end} \\
& \textbf{else} \\
& \quad \max(x, y)
\end{aligned}
$$

Výpočet

Výpočet s argumentami klesajúcimi v miere $\max(x, y)$:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\gcd(9,12) & = & \gcd(9,3) & = & \gcd(6,3) & = & \gcd(3,3) & = 3 \\
12 & > & 9 & > & 6 & > & 3 &
\end{array}
$$

Turingova úplnosť a totálne funkcionálne programovanie

Euklidov algoritmus pre výpočet najväčšieho spoločného deliteľa

Implementácia

$$\begin{aligned}\gcd(x,y) = \textbf{if } & x \neq 0 \wedge y \neq 0 \textbf{ then} \\ & \textbf{case} \\ & \quad x > y \Rightarrow \gcd(x \dot{-} y, y) \\ & \quad x = y \Rightarrow x \\ & \quad x < y \Rightarrow \gcd(x, y \dot{-} x) \\ & \textbf{end} \\ \textbf{else} & \\ & \max(x,y)\end{aligned}$$

Výpočet

Podmienky regularity zaručujú, že výpočet vždy skončí:

$$x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge x > y \rightarrow \max(x \dot{-} y, y) < \max(x,y)$$
$$x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge x < y \rightarrow \max(x, y \dot{-} x) < \max(x,y).$$

Turingova úplnosť a totálne funkcionálne programovanie

Euklidov algoritmus pre výpočet najväčšieho spoločného deliteľa

Implementácia

$$
\begin{aligned}
\gcd(x, y) = \textbf{if } & x \neq 0 \wedge y \neq 0 \textbf{ then} \\
& \textbf{case} \\
& \quad x > y \Rightarrow \gcd(x \dot{-} y, y) \\
& \quad x = y \Rightarrow x \\
& \quad x < y \Rightarrow \gcd(x, y \dot{-} x) \\
& \textbf{end} \\
\textbf{else} & \\
& \max(x, y)
\end{aligned}
$$

Výpočet

Podmienka $x \neq 0 \wedge y \neq 0$ sa zbytočne opakovane vyhodnocuje

$$\gcd(9, 12) = \gcd(9, 3) = \gcd(6, 3) = \gcd(3, 3) = 3$$

Turingova úplnosť a totálne funkcionálne programovanie

Euklidov algoritmus pre výpočet najväčšieho spoločného deliteľa

Alternatívna implementácia so vstupnou podmienkou

$$x \neq 0 \wedge y \neq 0 \rightarrow \gcd(x, y) = \textbf{case}$$
$$x > y \Rightarrow \gcd(x \dot{-} y, y)$$
$$x = y \Rightarrow x$$
$$x < y \Rightarrow \gcd(x, y \dot{-} x)$$
$$\textbf{end}$$

Výpočet

Ten nemusí skončiť:

$$\gcd(1, 0) = \gcd(1 \dot{-} 0, 0) = \gcd(1, 0) = \cdots$$

Program počíta čiastočnú funkciu!

Turingova úplnosť a totálne funkcionálne programovanie

Euklidov algoritmus pre výpočet najväčšieho spoločného deliteľa

Alternatívna implementácia so vstupnou podmienkou

$$x \neq 0 \wedge y \neq 0 \rightarrow \gcd(x, y) = \textbf{case}$$
$$x > y \Rightarrow \gcd(x \dot{-} y, y)$$
$$x = y \Rightarrow x$$
$$x < y \Rightarrow \gcd(x, y \dot{-} x)$$
$$\textbf{end}$$

Výpočet

Rozšírené podmienky regularity pre mieru $\max(x, y)$:

$$x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge x > y \rightarrow \max(x \dot{-} y, y) < \max(x, y) \wedge x \dot{-} y \neq 0 \wedge y \neq 0$$
$$x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge x < y \rightarrow \max(x, y \dot{-} x) < \max(x, y) \wedge x \neq 0 \wedge y \dot{-} x \neq 0.$$

Výpočet skončí pre vstupy spĺňajúce vstupnú podmienku.

Turing completeness and total functional programming

Evaluator of a programming language $\mathcal{L}$

Let M describe a single computation step of $\mathcal{L}$ and P its final configuration. Evaluator of $\mathcal{L}$ is the unlimited iteration of M s.t.

$$M^*(x) = \begin{cases} M^k(x) & \text{if } P\,M^k(x) \text{ and } k \text{ is the least such number,} \\ 0 & \text{if there is no such number.} \end{cases}$$

Program for computing the evaluator M^*:

$$\exists k\, PM^k(x) \to M^*(x) = \textbf{if } P(x) \textbf{ then } x \textbf{ else } M^*\, M(x).$$

Condition of regularity of the program:

$$\exists k\, PM^k(x) \wedge \neg P(x) \to t\, M(x) < t(x) \wedge \exists k\, PM^k M(x),$$

where $t(x) = \mu k \left[\exists l\, PM^l(x) \to PM^k(x)\right]$ is the number of computation steps from the configuration x (zero for infinite loop).

Turing completeness and total functional programming

Evaluator of a programming language $\mathcal{L}$

Let M describe a single computation step of $\mathcal{L}$ and P its final configuration. Evaluator of $\mathcal{L}$ is the unlimited iteration of M s.t.

$$M^*(x) = y \leftrightarrow \exists k \big(PM^k(x) \wedge \forall l < k \neg PM^k(x) \wedge y = M^k(x) \big) \vee \neg \exists k \, PM^k(x) \wedge y = 0.$$

Program for computing the evaluator M^*:

$$\exists k \, PM^k(x) \rightarrow M^*(x) = \textbf{if } P(x) \textbf{ then } x \textbf{ else } M^* \, M(x).$$

Condition of regularity of the program:

$$\exists k \, PM^k(x) \wedge \neg P(x) \rightarrow t \, M(x) < t(x) \wedge \exists k \, PM^k M(x),$$

where $t(x) = \mu k \big[\exists l \, PM^l(x) \rightarrow PM^k(x) \big]$ is the number of computation steps from the configuration x (zero for infinite loop).

Záver

Skúšobné obdobie

- Na riadne termíny sa zapisujte cez AIS2.
- Ďalšie informácie sú na webovej stranke predmetu:
  - konzultácie počas skúšobného obdobia,
  - súbor obsahujúci otázky na skúšku.