1-INF-450 Logika pre informatikov

Zimný semester 2013/14

12. prednáška

Ján Komara

Obsah 12. prednášky

Zopakovanie

Cieľ predmetu

- Vybudovať matematické základy deklaratívnych programovacích jazykov.

Stručná osnova predmetu

- Primitívne rekurzívne funkcie
  - Aritmetizácia dátových štruktúr.
  - Regulárne rekurzívne definície s mierou.
- Obecne rekurzívne funkcie
  - Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií:
    - Ackermannova funkcia (1928),
    - univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie.
- Čiastočne rekurzívne funkcie
  - Kleeneho prvá veta o rekurzii (veta o pevnom bode).
  - Kleeneho veta o normálnej forme.
  - Churchova téza a algoritmicky nerozhodnuteľné problémy.

Čiastočne rekurzívne funkcie

Definícia triedy čiastočne rekurzívnych funkcií

- Základné funkcie:
  - funkcia nasledovníka $\mathrm{S}(x) = x + 1$,
  - funkcia predchodcu $x \dot{-} 1$.
- Explicitné definície čiastočných funkcií:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[x_1, \ldots, x_n].$$

- Rekurzívne definície čiastočných funkcií:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \ldots, x_n].$$

Funkcia je rekurzívna, ak je to totálna čiastočne rekurzívna funkcia. Predikát je rekurzívny, ak taká je jeho charakteristická funkcia.

Čiastočne rekurzívne funkcie

Veta

Trieda rekurzívnych funkcií je obecne rekurzívne uzavretá.

Dôsledok

- *Každá obecne rekurzívna funkcia je rekurzívna.*
- *Každý obecne rekurzívny predikát je rekurzívny.*
- *Trieda rekurzívnych funkcií je primitívne rekurzívne uzavretá.*
- *Rekurzívne predikáty sú uzavreté na explicitné definície predikátov s ohraničenými formulami.*
- *Rekurzívne funkcie sú uzavreté na definície funkcií ohraničenou minimalizáciou.*
- *Rekurzívne funkcie sú uzavreté na definície funkcií regulárnou minimalizáciou.*

Čiastočne rekurzívne funkcie

Neohraničená minimalizácia

Sú to definície čiastočných funkcií v tvare

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq \text{najmenšie číslo } y \text{ také, že platí } \varphi[x_1, \dots, x_n, y],$$

kde φ je ohraničená formula. Skrátený zápis:

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq \mu y \left[\varphi[x_1, \dots, x_n, y]\right].$$

Regulárna minimalizácia:

$$f(\vec{x}) = \mu y \left[\varphi[\vec{x}, y]\right] \qquad \text{ak } \forall \vec{x} \exists y \varphi[\vec{x}, y],$$

je špeciálny prípad neohraničenej minimalizácie.

Veta

Trieda čiastočných rekurzívnych funkcií je uzavretá na definície čiastočných funkcií neohraničenou minimalizáciou.

Čiastočne rekurzívne funkcie

Neohraničená minimalizácia

Sú to definície čiastočných funkcií v tvare

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq y \leftrightarrow \varphi[x_1, \ldots, x_n, y] \wedge \forall z < y \, \neg\varphi[x_1, \ldots, x_n, z],$$

kde φ je ohraničená formula. Skrátený zápis:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mu y \left[\varphi[x_1, \ldots, x_n, y]\right].$$

Regulárna minimalizácia:

$$f(\vec{x}) = \mu y \left[\varphi[\vec{x}, y]\right] \qquad\qquad \text{ak } \forall \vec{x} \exists y \varphi[\vec{x}, y],$$

je špeciálny prípad neohraničenej minimalizácie.

Veta

Trieda čiastočných rekurzívnych funkcií je uzavretá na definície čiastočných funkcií neohraničenou minimalizáciou.

Čiastočne rekurzívne funkcie

Dôkaz.

V odvodení f použijeme túto čiastočne rekurzívnu funkciu:

$$g(y, \vec{x}) \simeq \begin{cases} y & \text{ak platí } \varphi[\vec{x}, y], \\ g(y+1, \vec{x}) & \text{ak neplatí } \varphi[\vec{x}, y]. \end{cases}$$

Rekurzívnosť čiastočnej funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned} P(\vec{x}, y) &\leftrightarrow \varphi[\vec{x}, y] \\ g(y, \vec{x}) &\simeq \textbf{if } P(\vec{x}, y) \textbf{ then } y \textbf{ else } g(y+1, \vec{x}) \\ f(\vec{x}) &\simeq g(0, \vec{x}). \end{aligned}$$

Korektnosť implementácie plynie z tejto vlastnosti čiastočne rekurzívnej funkcie g:

$$g(y, \vec{x}) \simeq z \leftrightarrow y \leq z \land \varphi[\vec{x}, z] \land \forall z_1 \big(y \leq z_1 < z \rightarrow \neg\varphi[\vec{x}, z_1]\big).$$

Kleeneho veta o normálnej forme

Veta o normálnej forme (Kleene)

Existuje unárna primitívne rekurzívna funkcia U *a pre každé* $n \geq 1$ *existuje* $(n+2)$*-árny primitívne rekurzívny predikát* T_n *taký, že pre každú n-árnu čiastočne rekurzívnu funkciu* f *existuje číslo e také, že pre všetky prirodzené čísla* $x_1, \dots, x_n$ *platí vzťah:*

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq \mathrm{U}\, \mu s[\mathrm{T}_n(e, x_1, \dots, x_n, s)].$$

Poznámka

Ak čiastočne rekurzívna funkcia f je totálna, potom minimalizácia vo výraze na pravej strane rovnosti je regulárna, t. j.

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \exists s\, \mathrm{T}_n(e, x_1, \dots, x_n, s).$$

V takomto prípade platí vzťah:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{U}\, \mu s[\mathrm{T}_n(e, x_1, \dots, x_n, s)].$$

Kleeneho veta o normálnej forme

Idea dôkazu

Neformálny popis predikátu T_n a funkcie U:

- Kleeneho predikát T_n má túto základnú vlastnosť:

  > $\mathrm{T}_n(e, x_1, \dots, x_n, s)$ *platí práve vtedy, keď e je kód programu a s je kód výpočtu tohoto programu pre vstupy $x_1, \dots, x_n$.*

  Tu programom rozumieme čiastočne rekurzívne odvodenie nejakej čiastočnej funkcie a výpočtom proces vyhodnotenia tejto čiastočnej rekurzívnej funkcie.
- Funkcia $\mathrm{U}(s)$ určí z kódu výpočtovej postupnosti výslednú hodnotu.

Ukážeme, že Kleeneho predikát T_n i funkciu U môžeme zvoliť ako primitívne rekurzívne.

Kleeneho veta o normálnej forme

Výpočtový model pre čiastočne rekurzívne funkcie

Táto téma bola prebratá na predošlej prednáške.

Aritmetizácia výpočtového modelu

Táto téma bola prebratá na predošlej prednáške a tiež na cvičení.

Kleeneho veta o normálnej forme

Aritmetizácia redukčnej relácie

Binárny primitívne rekurzívny predikát $t \rhd_1^\bullet r$ je aritmetizáciou jednokrokovej redukčnej relácie $\tau \rhd_1 \rho$:

> *$t \rhd_1^\bullet r$ platí práve vtedy, keď existujú uzavreté rekurzívne termy τ, ρ také, že $t = \ulcorner \tau \urcorner$, $r = \ulcorner \rho \urcorner$ a $\tau \rhd_1 \rho$.*

Primitívna rekurzívnosť predikátu plynie z tohoto vyjadrenia

$$t \rhd_1^\bullet r \leftrightarrow Ctm(t) \land \neg Nm(t) \land Ctm(r) \land Rd(t) = r.$$

Tu $Rd(t)$ je unárna primitívne rekurzívna funkcia taká, že platí:

$$\text{ak } \tau \rhd_1 \rho, \text{ potom } Rd(\ulcorner \tau \urcorner) = \ulcorner \rho \urcorner$$
$$Rd(\ulcorner \underline{x} \urcorner) = \ulcorner \underline{x} \urcorner.$$

Kleeneho veta o normálnej forme

Kleeneho predikát

Primitívne rekurzívny predikát $Computation(s)$ platí, ak číslo s je kódom (ukončenej) výpočtovej postupnosti:

$$Computation(s) \leftrightarrow\ s \neq 0 \wedge \forall i < L(s) \dot{-} 1\ (s)_i \rhd_1^{\bullet} (s)_{i+1} \wedge \\ \wedge\, Nm\,(s)_{L(s)\dot{-}1}\,.$$

Primitívne rekurzívna funkcia $\mathrm{U}(s)$ vyberie z výpočtovej postupnosti s výslednú hodnotu:

$$\mathrm{U}(s) = Dc\left((s)_{L(s)\dot{-}1}\right).$$

Kleeneho predikát T_n je $(n{+}2)$-árny primitívne rekurzívny predikát definovaný explicitne predpisom

$$\mathrm{T}_n(e, x_1, \ldots, x_n, s) \leftrightarrow\ Rf\,(n, e) \wedge Computation(s) \wedge \\ \wedge\, (s)_0 = e\boldsymbol{(}\langle \ulcorner \underline{x_1} \urcorner, \ldots, \ulcorner \underline{x_n} \urcorner \rangle\boldsymbol{)}.$$

Kleeneho veta o normálnej forme

Veta o normálnej forme (Kleene)

Existuje unárna primitívne rekurzívna funkcia U *a pre každé* $n \geq 1$ *existuje* $(n+2)$*-árny primitívne rekurzívny predikát* T_n *taký, že pre každú n-árnu čiastočne rekurzívnu funkciu f existuje číslo e také, že pre všetky prirodzené čísla* $x_1, \ldots, x_n$ *platí vzťah:*

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mathrm{U}\, \mu s[\mathrm{T}_n(e, x_1, \ldots, x_n, s)].$$

Poznámka

Z dôkazu Kleeneho vety o normálnej forme vyplýva, že pre každý n-árny rekurzívny funkčný symbol f platí

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mathrm{U}\, \mu s[\mathrm{T}_n(\ulcorner f \urcorner, x_1, \ldots, x_n, s)].$$

Kleeneho veta o normálnej forme

Veta

Každá rekurzívna funkcia je obecne rekurzívna.

Dôkaz.

Ak f je n-árna rekurzívna funkcia, potom existuje číslo e také, že

$$f(\vec{x}) = \mathrm{U}\,\mu s[\mathrm{T}_n(e, \vec{x}, s)].$$

Minimalizácia vo výraze na pravej strane rovnosti je regulárna:

$$\forall \vec{x} \exists s\, \mathrm{T}_n(e, \vec{x}, s).$$

Obecná rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned} g(\vec{x}) &= \mu s[\mathrm{T}_n(e, \vec{x}, s)] \\ f(\vec{x}) &= \mathrm{U}\, g(\vec{x}). \end{aligned}$$

Enumerácia čiastočne rekurzívnych funkcií

Rekurzívne indexy

Symbolom $\varphi_e^{(n)}$ označujeme n-árnu čiastočne rekurzívnu funkciu definovanú predpisom

$$\varphi_e^{(n)} = \begin{cases} f & \text{ak } e = \ulcorner f \urcorner \text{ pre nejaký } n\text{-árny rek. fun. symbol } f, \\ \emptyset^{(n)} & \text{ináč.} \end{cases}$$

Ak $f = \varphi_e^{(n)}$ tak číslo e nazveme rekurzívnym indexom čiastočnej funkcie f. Čísla v tvare $\ulcorner f \urcorner$ sú dobre vytvorené indexy.

Veta

Čiastočná funkcia je rekurzívna práve vtedy, keď má rekurzívny index.

Poznámka

Z dôkazu Kleeneho vety o normálnej forme vyplýva, že

$$\varphi_e^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mathrm{U}\, \mu s[\mathrm{T}_n(e, x_1, \ldots, x_n, s)].$$

Enumerácia čiastočne rekurzívnych funkcií

Enumeračná čiastočná funkcia

Symbolom Ψ_n si označíme $(n+1)$-árnu čiastočnú funkciu definovanú predpisom

$$\Psi_n(e, x_1, \ldots, x_n) \simeq \varphi_e^{(n)}(x_1, \ldots, x_n).$$

Veta o enumerácií (Kleene)

Pre každé $n \geq 1$, čiastočná funkcia Ψ_n je čiastočne rekurzívna funkcia, ktorá enumeruje (s opakovaním) triedu n-árnych čiastočne rekurzívnych funkcií, t. j. postupnosť

$$\lambda x_1 \ldots x_n \,.\, \Psi_n(e, x_1, \ldots, x_n) \qquad \textit{pre } e = 0, 1, 2, \ldots$$

je enumerácia triedy n-árnych čiastočne rekurzívnych funkcií.

Enumerácia čiastočne rekurzívnych funkcií

Dôkaz vety o enumerácií

- Z vety charakterizujúcej rekurzívne indexy plynie, že nasledujúca postupnosť

$$\begin{array}{lcccc} & \lambda\vec{x}.\Psi_n(0,\vec{x}) & \lambda\vec{x}.\Psi_n(1,\vec{x}) & \lambda\vec{x}.\Psi_n(2,\vec{x}) & \dots \\ \text{t.j.} & \varphi_0^{(n)} & \varphi_1^{(n)} & \varphi_2^{(n)} & \dots \end{array}$$

  je enumerácia triedy n-árnych čiastočne rekurzívnych funkcií.
- Z dôkazu Kleeneho vety o normálnej forme vyplýva, že

$$\Psi_n(e,\vec{x}) \simeq \mathrm{U}\,\mu s[\mathrm{T}_n(e,\vec{x},s)].$$

  Rekurzívnosť čiastočnej funkcie Ψ_n plynie z tohoto vyjadrenia

$$f(e,\vec{x}) \simeq \mu s[\mathrm{T}_n(e,\vec{x},s)] \qquad \Psi_n(e,\vec{x}) \simeq \mathrm{U}\,f(e,\vec{x}).$$

Enumerácia čiastočne rekurzívnych funkcií

Enumeračná čiastočná funkcia je univerzálna (platí to aj naopak)

$(n+1)$-árna čiastočná funkcia Ψ_n spĺňa tieto dve podmienky:

- Pre každú n-árnu čiastočne rekurzívnu funkciu f existuje číslo e také, že pre každú n-ticu čísel $x_1, \ldots, x_n$ platí rovnosť

$$\Psi_n(e, x_1, \ldots, x_n) \simeq f(x_1, \ldots, x_n).$$

- Pre každé číslo e je n-árna čiastočná funkcia f definovaná vzťahom

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \Psi_n(e, x_1, \ldots, x_n)$$

  čiastočne rekurzívna.

Vravíme, že Ψ_n je univerzálnou pre triedu n-árnych čiastočne rekurzívnych funkcií.

Enumerácia čiastočne rekurzívnych funkcií

Zúplnenie enumeračnej čiastočnej funkcie nie je rekurzívna funkcia

Dôkaz sporom. Predpokladajme napr., že binárna funkcia f:

$$f(e,x) \simeq \begin{cases} \Psi_1(e,x) & \text{ak } \Psi_1(e,x)\downarrow \\ 0 & \text{ak } \Psi_1(e,x)\uparrow \end{cases} \tag{1}$$

je rekurzívna. Potom aj unárna funkcia g definovaná vzťahom

$$g(x) = f(x,x) + 1 \tag{2}$$

je rekurzívna. Existuje teda číslo e také, že pre každé číslo x platí

$$\Psi_1(e,x) \simeq g(x). \tag{3}$$

Odtiaľ $\Psi_1(e,e)\downarrow$. Postupnými úpravami odvodíme spor:

$$g(e) \overset{(2)}{=} f(e,e) + 1 \overset{(1)}{\simeq} \Psi_1(e,e) + 1 \overset{(3)}{\simeq} g(e) + 1.$$

Enumerácia čiastočne rekurzívnych funkcií

Zúplnenie enumeračnej čiastočnej funkcie nie je rekurzívna funkcia

Dôkaz sporom. Predpokladajme napr., že $(n+1)$-árna funkcia f:

$$f(e, \vec{x}) \simeq \begin{cases} \Psi_n(e, \vec{x}) & \text{ak } \Psi_n(e, \vec{x})\downarrow \\ 0 & \text{ak } \Psi_n(e, \vec{x})\uparrow \end{cases} \tag{1}$$

je rekurzívna. Potom aj n-árna funkcia g definovaná vzťahom

$$g(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, x_1, \ldots, x_n) + 1 \tag{2}$$

je rekurzívna. Existuje teda číslo e také, že pre každé $x_1, \ldots, x_n$:

$$\Psi_n(e, x_1, \ldots, x_n) \simeq g(x_1, \ldots, x_n). \tag{3}$$

Odtiaľ $\Psi_n(e, e, \ldots, e)\downarrow$. Postupnými úpravami odvodíme spor:

$$g(e, .., e) \overset{(2)}{=} f(e, e, .., e) + 1 \overset{(1)}{\simeq} \Psi_n(e, e, .., e) + 1 \overset{(3)}{\simeq} g(e, .., e) + 1.$$

Enumerácia čiastočne rekurzívnych funkcií

Graf enumeračnej čiastočnej funkcie nie je rekurzívny predikát

Dôkaz sporom. Predpokladajme, že graf binárnej enumeračnej čiastočnej funkcie Ψ_1:

$$G_1(e, x, y) \leftrightarrow \Psi_1(e, x) \simeq y \tag{1}$$

je rekurzívny predikát. Potom je rekurzívny aj unárny predikát P:

$$P(x) \leftrightarrow G_1(x, x, 0). \tag{2}$$

Existuje teda číslo e také, že pre každé číslo x platí rovnosť

$$\Psi_1(e, x) \simeq P_*(x). \tag{3}$$

Postupnými úpravami teraz dostaneme spor:

$$P(e) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} G_1(e, e, 0) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \Psi_1(e, e) \simeq 0 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} P_*(e) \simeq 0 \Leftrightarrow \neg P(e).$$

Enumerácia čiastočne rekurzívnych funkcií

Graf enumeračnej čiastočnej funkcie nie je rekurzívny predikát

Dôkaz sporom. Predpokladajme, že graf $(n+1)$-árnej enumeračnej čiastočnej funkcie Ψ_n:

$$G_n(e, x_1, \ldots, x_n, y) \leftrightarrow \Psi_n(e, x_1, \ldots, x_n) \simeq y \tag{1}$$

je rekurzívny predikát. Potom je rekurzívny aj n-árny predikát P:

$$P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow G_n(x_1, x_1, \ldots, x_n, 0). \tag{2}$$

Existuje teda číslo e také, že pre každú n-ticu čísel $x_1, \ldots, x_n$ platí

$$\Psi_n(e, x_1, \ldots, x_n) \simeq P_*(x_1, \ldots, x_n). \tag{3}$$

Postupnými úpravami teraz dostaneme spor:

$$P(e, \ldots, e) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} G_n(e, e, \ldots, e, 0) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \Psi_n(e, e, \ldots, e) \simeq 0 \overset{(3)}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow P_*(e, \ldots, e) \simeq 0 \Leftrightarrow \neg P(e, \ldots, e).$$

Čiastočne μ-rekurzívne funkcie

Primitívna rekurzia čiastočných funkcií

Sú to definície čiastočných funkcií v tvare

$$\begin{aligned} f(0, y_1, \ldots, y_n) &\simeq g(y_1, \ldots, y_n) \\ f(\mathrm{S}(x), y_1, \ldots, y_n) &\simeq h\big(x, f(x, y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n\big). \end{aligned}$$

Primitívna rekurzia pre totálne g, h:

$$\begin{aligned} f(0, y_1, \ldots, y_n) &= g(y_1, \ldots, y_n) \\ f(\mathrm{S}(x), y_1, \ldots, y_n) &= h\big(x, f(x, y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n\big) \end{aligned}$$

je špeciálny prípad operátora primitívnej rekurzie čiastočných funkcií.

Čiastočne μ-rekurzívne funkcie

Veta

Trieda čiastočne rekurzívnych funkcií je uzavretá na primitívnu rekurziu čiastočných funkcií.

Dôkaz.

Nech g, h sú čiastočne rekurzívne funkcie a

$$\begin{aligned} f(0, y_1, \ldots, y_n) &\simeq g(y_1, \ldots, y_n) \\ f(\mathrm{S}(x), y_1, \ldots, y_n) &\simeq h\big(x, f(x, y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n\big). \end{aligned}$$

Rekurzívnosť čiastočnej funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned} f(x, y_1, \ldots, y_n) \simeq\ & \textbf{if } x \neq 0 \textbf{ then} \\ & \quad h\big(x \dot{-} 1, f(x \dot{-} 1, y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n\big) \\ & \textbf{else} \\ & \quad g(y_1, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

Čiastočne μ-rekurzívne funkcie

Minimalizácia čiastočných funkcií

Sú to definície čiastočných funkcií v tvare

$$f(\vec{x}) \simeq y \leftrightarrow g(y, \vec{x}) \simeq 1 \land \forall z < y \big(g(z, \vec{x})\!\downarrow \land\, g(z, \vec{x}) \not\simeq 1\big).$$

Skrátený zápis

$$f(\vec{x}) \simeq \mu y[g(y, \vec{x}) \simeq 1].$$

Neohraničená minimalizácia pre totálne g:

$$f(\vec{x}) \simeq \mu y[g(y, \vec{x}) = 1].$$

je špeciálny prípad operátora minimalizácie čiastočných funkcií.

Čiastočne μ-rekurzívne funkcie

Minimalizácia čiastočných funkcií

Sú to definície čiastočných funkcií v tvare

$$f(\vec{x}) \simeq y \leftrightarrow g(y, \vec{x}) \simeq 1 \land \forall z < y \exists v \big(g(z, \vec{x}) \simeq v \land v \neq 1 \big).$$

Skrátený zápis

$$f(\vec{x}) \simeq \mu y[g(y, \vec{x}) \simeq 1].$$

Neohraničená minimalizácia pre totálne g:

$$f(\vec{x}) \simeq \mu y[g(y, \vec{x}) = 1].$$

je špeciálny prípad operátora minimalizácie čiastočných funkcií.

Čiastočne μ-rekurzívne funkcie

Veta

Trieda čiastočne rekurzívnych funkcií je uzavretá na minimalizáciu čiastočných funkcií.

Dôkaz.

Nech g je čiastočne rekurzívna funkcia a

$$f(\vec{x}) \simeq \mu y[g(y,\vec{x}) \simeq 1].$$

Rekurzívnosť čiastočnej funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned} h(y,\vec{x}) &\simeq \textbf{if } \big(g(y,\vec{x}) =_* 1\big) \neq 0 \textbf{ then } y \textbf{ else } h(y+1,\vec{x}) \\ f(\vec{x}) &\simeq h(0,\vec{x}). \end{aligned}$$

Korektnosť implementácie plynie z tejto vlastnosti č. r. funkcie h:

$$\begin{aligned} h(y,\vec{x}) \simeq z \leftrightarrow y \leq z \land g(z,\vec{x}) \simeq 1 \land \\ \forall z_1 \big(y \leq z_1 < z \to g(z_1,\vec{x})\downarrow \land\, g(z_1,\vec{x}) \not\simeq 1\big). \end{aligned}$$

Čiastočne μ-rekurzívne funkcie

Definícia triedy čiastočne μ-rekurzívnych funkcií

- Základné funkcie:
  - konštantná funkcia $\mathrm{Z}(x) = 0$,
  - funkcia nasledovníka $\mathrm{S}(x) = x + 1$,
  - identity (projekcie) $\mathrm{I}_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ pre každé $1 \leq i \leq n$.
- Kompozícia (skladanie) čiastočných funkcií:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq h\big(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)\big).$$

- Primitívna rekurzia čiastočných funkcií:

$$\begin{aligned} f(0, y_1, \ldots, y_n) &\simeq g(y_1, \ldots, y_n) \\ f\big(\mathrm{S}(x), y_1, \ldots, y_n\big) &\simeq h\big(x, f(x, y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n\big). \end{aligned}$$

- Minimalizácia čiastočných funkcií:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mu y[g(y, x_1, \ldots, x_n) \simeq 1].$$

Čiastočne μ-rekurzívne funkcie

Definícia

Predikát je μ-rekurzívny, ak taká je jeho charakteristická funkcia.

Veta

Trieda μ-rekurzívnych funkcií je primitívne rekurzívne uzavretá.

Dôsledok

- *Každá primitívne rekurzívna funkcia je μ-rekurzívna.*
- *Každý primitívne rekurzívny predikát je μ-rekurzívny.*

Čiastočne μ-rekurzívne funkcie

Veta

Trieda čiastočne rekurzívnych funkcií je totožná s triedou čiastočne μ-rekurzívnych funkcií.

Dôkaz.

Ak f je n-árna čiastočne rekurzívna funkcia, potom existuje číslo e také, že pre všetky čísla $x_1, \ldots, x_n$ platí vzťah:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mathrm{U}\, \mu s[\mathrm{T}_n(e, x_1, \ldots, x_n, s)].$$

μ-rekurzívnosť čiastočnej funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned} P(s, x_1, \ldots, x_n) &\leftrightarrow \mathrm{T}_n(e, x_1, \ldots, x_n, s) \\ g(x_1, \ldots, x_n) &\simeq \mu s[P_*(s, x_1, \ldots, x_n) \simeq 1] \\ f(x_1, \ldots, x_n) &\simeq \mathrm{U}\, g(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Opačná inklúzia plynie z faktu, že trieda čiastočne rekurzívnych funkcií je μ-rekurzívne uzavretá.

Church-Turingova téza

Churchova téza (1936)

Trieda intuitívne vypočítateľných funkcií nad oborom prirodzených čísel je totožná s triedou obecne rekurzívnych funkcií.

Turingova téza (1936-1937)

Trieda intuitívne vypočítateľných funkcií nad oborom prirodzených čísel je totožná s triedou funkcií vypočítateľných na Turingových strojoch.

Modely (čiastočne) vypočítateľných funkcií

- obecne rekurzívne funkcie [Herbrand-Gödel, 1931, 1934],
- λ-definovateľné funkcie [Church, 1932],
- (čiastočne) μ-rekurzívne funkcie [Kleene, 1935, 1952],
- Turingove stroje [Turing, 1936-1937],
- čiastočne rekurzívne funkcie [Kleene, 1952],
- registrové stroje [napr. Minsky, 1961].

Záver

11. cvičenie

- Výsledky s komentárom nájdete na webe.

12. cvičenie

- Pracujte samostatne.
- Úlohy odovzdať najneskôr do 12:00 v pondelok budúci týždeň.

13. prednáška

- Začína zajtra v stredu o 09:50 v miestnosti F1-248.
- Rekurzívne rozhodnuteľné, polorozhodnuteľné a nerozhodnuteľné problémy.
- Turingova úplnosť a totálne funkcionálne programovanie.