1-INF-450 Logika pre informatikov

Zimný semester 2014/15
10. prednáška

Ján Komara

Obsah 10. prednášky

Zopakovanie

Cieľ predmetu

- Vybudovať matematické základy deklaratívnych programovacích jazykov.

Stručná osnova predmetu

- Primitívne rekurzívne funkcie
  - Aritmetizácia dátových štruktúr.
  - Regulárne rekurzívne definície s mierou.
- Obecne rekurzívne funkcie
  - Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií:
    - Ackermannova funkcia (1928),
    - univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie.
- Čiastočne rekurzívne funkcie
  - Kleeneho prvá veta o rekurzii (veta o pevnom bode).
  - Kleeneho veta o normálnej forme.
  - Churchova téza a algoritmicky nerozhodnuteľné problémy.

Zopakovanie

Dobre založené relácie

Vravíme, že relácia $\vec{x} \prec \vec{y}$ na N^n je dobre založená (tiež noetheriánská), ak každá klesajúca postupnosť

$$\vec{x}_1 \succ \vec{x}_2 \succ \vec{x}_3 \succ \vec{x}_4 \succ \cdots$$

je konečná. Tu $\vec{x} \succ \vec{y} \leftrightarrow \vec{y} \prec \vec{x}$.
Úplné dobre založené usporiadanie sa nazýva dobré usporiadanie.

Príklady

- Relácia $\vec{x} \prec \vec{y}$ indukovaná mierou $\mu[\vec{x}]$ do štandardného usporiadania prirodzených čísel:

$$\vec{x} \prec \vec{y} \leftrightarrow \mu[\vec{x}] < \mu[\vec{y}].$$

- Lexikografické usporiadanie dvojíc prirodzených čísel:

$$(a, b) <_{\mathrm{lex}} (c, d) \leftrightarrow a < c \lor a = c \land b < d.$$

Zopakovanie

Regulárna rekurzia do dobre založenej relácie $\prec$

Sú to definície v tvare

$$f(\vec{x}) = \tau[f; \vec{x}], \tag{1}$$

pre ktoré sú splnené podmienky regularity.
Podmienky regularity majú tvar:

$$\Gamma^{\tau}_{f(\vec{\rho})}[f; \vec{x}] \to \vec{\rho}[f; \vec{x}] \prec \vec{x}$$

pre každú rekurzívnu aplikáciu $f(\vec{\rho})$ funkcie f, ktorá je strážená podmienkou $\Gamma^{\tau}_{f(\vec{\rho})}$ v terme τ.
Splnenie podmienok pre funkciu definovanou pridruženou rovnosťou

$$f(\vec{x}) = \tau\left[[f]^{\prec}_{\vec{x}}; \vec{x}\right].$$

Táto funkcia je potom jediným riešením funkcionálnej rovnice (1).

Zopakovanie

Primitívne rekurzívne funkcie (charakterizácia)

Trieda primitívne rekurzívnych funkcií je najmenšia trieda funkcií, ktorá obsahuje funkciu nasledovníka $S(x) = x + 1$, funkciu predchodcu $x \dot{-} 1$ a je uzavretá na explicitné definície a regulárne rekurzívne definície s mierou.

Obecne rekurzívne funkcie (definícia)

Trieda obecne rekurzívnych funkcií je najmenšia trieda funkcií, ktorá obsahuje funkciu nasledovníka $S(x) = x + 1$, funkciu predchodcu $x \dot{-} 1$ a je uzavretá na explicitné definície a regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií.

Obecne rekurzívne funkcie, ktoré nie sú primitívne rekurzívne

- Ackermannova funkcia (1928).
- Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie.

Zopakovanie

Základné konštrukcie pri tvorbe deklaratívnych programov

- Premenné, konštanty a funkčné aplikácie.
- Podmienkové výrazy:

case
$\varphi_1[\vec{x};\vec{y}_1] \Rightarrow \rho_1[\vec{x},\vec{y}_1]$
$\vdots$
$\varphi_m[\vec{x};\vec{y}_m] \Rightarrow \rho_m[\vec{x};\vec{y}_m]$
end

case
$\chi_1[\vec{x}] = 1 \wedge \vec{\omega}_1[\vec{x}] = \vec{y}_1 \Rightarrow \rho_1[\vec{x},\vec{y}_1]$
$\vdots$
$\chi_m[\vec{x}] = 1 \wedge \vec{\omega}_m[\vec{x}] = \vec{y}_m \Rightarrow \rho_m[\vec{x},\vec{y}_m]$
end.

$\chi_i[\vec{x}]$ je charakt. term pre porovnávanie so vzorom $\varphi_i[\vec{x};\vec{y}_i]$:

$$\chi_i[\vec{x}] = 1 \vee \chi_i[\vec{x}] = 0 \qquad \exists\vec{y}_i\varphi_i[\vec{x};\vec{y}_i] \leftrightarrow \chi_i[\vec{x}] = 1.$$

Sémantika:

$$\mathrm{D}\Big(\chi_1[\vec{x}], \rho_1[\vec{x},\vec{\omega}_1[\vec{x}]], \ldots, \mathrm{D}\left(\chi_m[\vec{x}], \rho_m[\vec{x},\vec{\omega}_m[\vec{x}]], 0\right)\ldots\Big).$$

Zopakovanie

Základné konštrukcie pri tvorbe deklaratívnych programov

- Premenné, konštanty a funkčné aplikácie.
- Podmienkové výrazy:

case
$\varphi_1[\vec{x};\vec{y}_1] \Rightarrow \rho_1[\vec{x},\vec{y}_1]$
$\vdots$
$\varphi_m[\vec{x};\vec{y}_m] \Rightarrow \rho_m[\vec{x};\vec{y}_m]$
end

case
$\chi_1[\vec{x}] = 1 \wedge \vec{\omega}_1[\vec{x}] = \vec{y}_1 \Rightarrow \rho_1[\vec{x},\vec{y}_1]$
$\vdots$
$\chi_m[\vec{x}] = 1 \wedge \vec{\omega}_m[\vec{x}] = \vec{y}_m \Rightarrow \rho_m[\vec{x},\vec{y}_m]$
end.

Podmienka úplnosti a jednoznačnosti:

$$\bigvee_{i=1}^{m} \exists \vec{y}_i \varphi_i[\vec{x};\vec{y}_1] \wedge \bigwedge_{i,j=1}^{m} \forall \vec{y}_i \forall \vec{y}_j \big(\varphi_i[\vec{x};\vec{y}_i] \wedge \varphi_j[\vec{x};\vec{y}_j] \rightarrow \rho_i[\vec{x},\vec{y}_i] = \rho_j[\vec{x},\vec{y}_j]\big).$$

Matematická notácia:

$$\mathcal{D}^{\vec{\omega}_1,\ldots,\vec{\omega}_m}_{\chi_1,\ldots,\chi_m}\big(\varphi_1[\vec{x};\vec{y}_1],\rho_1[\vec{x},\vec{y}_1],\ldots,\varphi_m[\vec{x};\vec{y}_m],\rho_m[\vec{x},\vec{y}_m]\big).$$

Čiastočné funkcie

Čiastočné funkcie

n-árna čiastočná funkcia f je jednoznačná relácia z N^n do N:

$$(\vec{x}, y) \in f \wedge (\vec{x}, z) \in f \to y = z.$$

Definičný obor čiastočnej funkcie f:

$$\mathrm{dom}\, f = \{\vec{x} \in \mathrm{N}^n \mid \exists y\, (\vec{x}, y) \in f\}.$$

Čiastočná funkcia f je totálna, ak $\mathrm{dom}\, f = \mathrm{N}^n$, t.j.

$$\forall \vec{x} \exists y (\vec{x}, y) \in f.$$

Pre každé $n \geq 1$, symbolom $\emptyset^{(n)}$ označujeme n-árnu čiastočnú funkciu, ktorá nie je nikde definovaná.

Čiastočné funkcie

Usporiadanie čiastočných funkcií

Trieda n-árnych čiastočných funkcií je usporiadaná reláciou inklúzie:

$$f \subseteq g \leftrightarrow \forall \vec{x} \forall y \big((\vec{x}, y) \in f \rightarrow (\vec{x}, y) \in g \big).$$

Základné pojmy:

- f je rozšírením g, ak $g \subseteq f$.
- f je zúžením g, ak $f \subseteq g$.
- Rozšírenie f, ktoré je totálne, nazveme zúplnením čiastočnej funkcie f.

Niektoré základné vzťahy:

- $\emptyset^{(n)} \subseteq f$ pre každú čiastočnú n-árnu funkciu f.
- Ak $f \subseteq g$ a f je totálna, potom $f = g$.

Čiastočné funkcie

Reťazec

Nekonečná postupnosť n-árnych čiastočných funkcií

$$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_i, f_{i+1}, \ldots$$

je reťazec, ak platí

$$f_0 \subseteq f_1 \subseteq f_2 \subseteq \cdots \subseteq f_i \subseteq f_{i+1} \subseteq \cdots .$$

Množinové zjednotenie $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$:

$$(\vec{x}, y) \in \bigcup_{i=0}^{\infty} f_i \leftrightarrow \exists i\, (\vec{x}, y) \in f_i,$$

je jeho limita (supremum). Je to opäť n-árna čiastočná funkcia.

Čiastočné funkcie

Čiastočná denotácia termov

Tvrdenie $\tau \simeq y$, ktoré čítame takto

hodnota výrazu τ existuje a je rovná číslu y,

je definované induktívne na štruktúru termu τ:

$$x \simeq y \equiv x = y$$

$$f(\rho_1, \ldots, \rho_n) \simeq y \equiv \exists z_1 \cdots \exists z_n \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} \rho_i \simeq z_i \land (z_1, \ldots, z_n, y) \in f \Big)$$

$$\mathrm{D}(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \simeq y \equiv \exists z_1 \big(\rho_1 \simeq z_1 \land (z_1 \neq 0 \land \rho_2 \simeq z \lor z_1 = 0 \land \rho_3 \simeq z) \big).$$

Ak hodnota termu existuje, potom je určená jednoznačne:

$$\tau \simeq y \land \tau \simeq z \to y = z.$$

Ak τ obsahuje len funkcie, potom $\tau \simeq y \leftrightarrow \tau = y$.

Čiastočné funkcie

Silná rovnosť (Kleene)

Označenie:

$$\begin{aligned} &\tau\downarrow \equiv \exists y\, \tau \simeq y && (\tau \text{ je definovaný, má hodnotu, konverguje}) \\ &\tau\uparrow \equiv \neg\exists y\, \tau \simeq y && (\tau \text{ nie je definovaný, nemá hodnotu, diverguje}). \end{aligned}$$

Silná rovnosť $\tau \simeq \rho$ je definovaná predpisom

$$\tau \simeq \rho \equiv \exists y \exists z(\tau \simeq y \land \rho \simeq z \land y = z) \lor \tau\uparrow \land \rho\uparrow.$$

Platí

$$\tau \simeq \rho \leftrightarrow \forall y(\tau \simeq y \leftrightarrow \rho \simeq y)$$

$$\tau \simeq \tau \qquad\qquad \tau \simeq \rho \to \rho \simeq \tau$$

$$\tau \simeq \rho \land \rho \simeq \sigma \to \tau \simeq \sigma.$$

Ak termy τ, ρ obsahujú len funkcie, potom $\tau \simeq \rho \leftrightarrow \tau = \rho$.

Čiastočné funkcie

Explicitné definície čiastočných funkcií

Sú to definície čiastočných funkcií v tvare

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[x_1, \ldots, x_n].$$

Funkcionálna rovnica má jediné riešenie. Je to n-árna čiastočná funkcia f definovaná vzťahom

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \forall y \big(f(x_1, \ldots, x_n) \simeq y \leftrightarrow \tau[x_1, \ldots, x_n] \simeq y \big).$$

Explicitné definície (totálnych) funkcií

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tau[x_1, \ldots, x_n]$$

sú špeciálnym prípadom explicitných definícií čiastočných funkcií.

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Veta

Funkcionálna rovnica v neznámej f:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \ldots, x_n]$$

má najmenšie riešenie n-árnu čiastočnú funkciu $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$, ktorá je limitou reťazca $f_0, f_1, f_2, \ldots$ definovaného predpisom

$$f_0 = \emptyset^{(n)}$$
$$f_{i+1}(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f_i; x_1, \ldots, x_n].$$

Poznámka

Toto je prvá časť originálnej Kleeneho prvej vety o rekurzii. V druhej časti sa tvrdí, že najmenšie riešenie je vypočítateľné.

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Funkcionálna notácia

Symbolom $\tau[f]$ označme n-árnu čiastočnú funkciu definovanú predpisom:

$$\tau[f](x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \ldots, x_n].$$

Kleeneho prvá veta o rekurzii charakterizuje pevné body funkcionálu $\lambda f.\tau[f]$.

Veta o pevnom bode

Funkcionálna rovnica v neznámej f:

$$f = \tau[f]$$

má najmenšie riešenie n-árnu čiastočnú funkciu $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$, ktorá je limitou reťazca $f_0, f_1, f_2, \ldots$ definovaného predpisom

$$f_0 = \emptyset^{(n)} \qquad\qquad f_{i+1} = \tau[f_i].$$

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Lema (Monotónnosť)

Pre ľubovolné n-árne čiastočné funkcie f a g platí

$$f \subseteq g \to \tau[f] \subseteq \tau[g].$$

Dôkaz

Indukciou na štruktúru termu τ.

Dôsledok

Ak postupnosť n-árnych čiastočných funkcií

$$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_i, \ldots$$

je reťazec, potom aj táto postupnosť n-árnych čiastočných funkcií

$$\tau[f_0], \tau[f_1], \tau[f_2], \ldots, \tau[f_i], \ldots$$

je reťazec.

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Lema (Monotónnosť)

Pre ľubovolné n-árne čiastočné funkcie f a g platí

$$\forall\vec{x}\forall y\big(f(\vec{x}) \simeq y \to g(\vec{x}) \simeq y\big) \to \forall\vec{x}\forall y\big(\tau[f;\vec{x}] \simeq y \to \tau[g;\vec{x}] \simeq y\big).$$

Dôkaz

Indukciou na štruktúru termu τ.

Dôsledok

Ak postupnosť n-árnych čiastočných funkcií

$$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_i, \ldots$$

je reťazec, potom aj táto postupnosť n-árnych čiastočných funkcií

$$\tau[f_0], \tau[f_1], \tau[f_2], \ldots, \tau[f_i], \ldots$$

je reťazec.

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Lema (Spojitosť)

Pre ľubovolný reťazec n-árnych čiastočných funkcií

$$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_i, \ldots$$

platí vzťah

$$\tau[\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i] = \bigcup_{i=0}^{\infty} \tau[f_i].$$

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Lema (Spojitosť)

Pre ľubovolný reťazec n-árnych čiastočných funkcií

$$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_i, \ldots$$

platí vzťah

$$\forall \vec{x} \forall y \big(\tau[\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i; \vec{x}] \simeq y \leftrightarrow \exists i\, \tau[f_i; \vec{x}] \simeq y \big).$$

Dôkaz

Implikácia ($\leftarrow$) je priamočiary dôsledok monotónosti. Opačná implikácia sa dokazuje indukciou na štruktúru termu τ.

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Dôkaz vety o pevnom bode

- Postupnosť $f_0, f_1, f_2, \dots$ je reťazec, t.j.

$$\forall i\, f_i \subseteq f_{i+1}.$$

- Limita reťazca $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$ je riešenie funkcionálnej rovnice, t.j.

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i = \tau[\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i].$$

- Limita reťazca $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$ je najmenšie riešenie, t. j. ak g je riešenie funkcionálnej rovnice, potom

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i \subseteq g.$$

  Tu stačí dokázať

$$\forall i\, f_i \subseteq g.$$

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Dôkaz vety o pevnom bode

- Postupnosť $f_0, f_1, f_2, \ldots$ je reťazec, t.j.

$$\forall i \forall \vec{x} \forall y \big(f_i(\vec{x}) \simeq y \to f_{i+1}(\vec{x}) \simeq y \big).$$

- Limita reťazca $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$ je riešenie funkcionálnej rovnice, t.j.

$$\forall \vec{x} \, (\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i)(\vec{x}) \simeq \tau[\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i; \vec{x}].$$

- Limita reťazca $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$ je najmenšie riešenie, t. j. ak g je riešenie funkcionálnej rovnice, potom

$$\forall \vec{x} \forall y \big((\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i)(\vec{x}) \simeq y \to g(\vec{x}) \simeq y \big).$$

  Tu stačí dokázať

$$\forall i \forall \vec{x} \forall y \big(f_i(\vec{x}) \simeq y \to g(\vec{x}) \simeq y \big).$$

Rekurzívne definície

Rekurzívne definície čiastočných funkcií

Sú to definície čiastočných funkcií v tvare

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \ldots, x_n].$$

Čiastočnou funkciou, ktorá je definovaná uvedeným vzťahom, rozumieme najmenšie riešenie tejto funkcionálnej rovnice v triede n-árnych čiastočných funkcií. Existencia takého riešenia plynie z Kleeneho prvej vety o rekurzii.

Poznámka

Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tau[f; x_1, \ldots, x_n]$$

sú špeciálnym prípadom rekurzívnych definícií čiastočných funkcií. Tento fakt je to dôsledok nasledujúcich dvoch viet.

Rekurzívne definície

Veta

Predpokladajme, že

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tau[f; x_1, \ldots, x_n]$$

je regulárna rekurzívna definícia n-árnej funkcie f. Potom funkcionálna rovnica v triede n-árnych čiastočných funkcií

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \ldots, x_n]$$

je rekurzívna definícia tej istej funkcie f.

Rekurzívne definície

Dôkaz.

Predpokladajme, že rekurzívna definícia je regulárna v dobre založenej relácie $\prec$. Nech g je riešenie funkcionálnej rovnice

$$g(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[g; x_1, \ldots, x_n]. \tag{1}$$

$\prec$-indukciou podľa $x_1, \ldots, x_n$ dokážeme tvrdenie

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq g(x_1, \ldots, x_n).$$

V induktívnom kroku pre $x_1, \ldots, x_n$ dokážeme pomocné tvrdenie

$$\Gamma^{\tau}_{\rho}[f; x_1, \ldots, x_n] \to \rho[f; x_1, \ldots, x_n] \simeq \rho[g; x_1, \ldots, x_n] \tag{2}$$

pre každý podterm ρ termu τ strážený podmienkou Γ^{τ}_{ρ} v τ. Odtiaľ

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tau[f; x_1, \ldots, x_n] \overset{(2)}{\simeq} \tau[g; x_1, \ldots, x_n] \overset{(1)}{\simeq} g(x_1, \ldots, x_n).$$

Rekurzívne definície

Veta

Predpokladajme, že

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \dots, x_n]$$

je rekurzívna definícia n-árnej čiastočnej funkcie f. *Predpokladajme ďalej, že* f *a všetky pomocné čiastočné funkcie v terme* τ *sú totálne. Potom funkcionálna rovnica v triede n-árnych funkcií*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \tau[f; x_1, \dots, x_n]$$

je regulárna rekurzívna definícia tej istej funkcie f.

Rekurzívne definície

Dôkaz.

Podľa prvej vety o rekurzii funkcia f sa dá vyjadriť v tvare $f = \bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$, kde $f_0, f_1, f_2, \ldots$ je reťazec definovaný predpisom

$$f_0 = \emptyset^{(n)} \qquad\qquad f_{i+1}(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f_i; x_1, \ldots, x_n].$$

Definícia dobre založenej relácie $\prec$:

$$m(x_1, \ldots, x_n) = \text{najmenšie } i \text{ také, že } f_i(x_1, \ldots, x_n)\downarrow$$
$$(x_1, \ldots, x_n) \prec (y_1, \ldots, y_n) \leftrightarrow m(x_1, \ldots, x_n) < m(y_1, \ldots, y_n).$$

Potom funkcionálna rovnica

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tau[f; x_1, \ldots, x_n]$$

je regulárna rekurzívna definícia do dobre založenej relácie $\prec$. Jej (jediným) riešením je funkcia f.

Výpočtový model

Úvod

Uvažujme rekurzívnu definíciu n-árnej čiastočnej funkcie f v tvare

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \ldots, x_n].$$

Chceme ukázať, že f je vypočítateľná vo výpočtovom modeli, ktorý je založený na vyhodnocovaní výrazov.

Označenie a predpoklady

- $g_1, \ldots, g_k$ sú všetky pomocné čiastočné funkcie v τ.
- Každá nenulová konštanta c v terme τ je nahradená odpovedajúcim monadickým numerálom:

$$\overbrace{\mathsf{S} \ldots \mathsf{S}}^{c\text{-krát}}(0).$$

Výpočtový model

Monadické numerály

Výpočet prebieha na monadických numeráloch:

$$0 \quad S(0) \quad S\,S(0) \quad S\,S\,S(0) \quad S\,S\,S\,S(0) \quad \ldots .$$

Označenie:

- Ak x je prirodzené číslo, potom $\underline{x}$ je monadický numerál, ktorého hodnota je číslo x:

$$\underline{x} \equiv \overbrace{S \ldots S}^{x\text{-krát}}(0).$$

- Ak $x_1, \ldots, x_n$ sú prirodzené čísla, potom

$$\underline{x_1, \ldots, x_n} \equiv \underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n} \equiv \overbrace{S \ldots S}^{x_1\text{-krát}}(0), \ldots, \overbrace{S \ldots S}^{x_n\text{-krát}}(0).$$

Výpočtový model

Jeden krok výpočtu

Ak uzavretý term ρ nie je numerál, tak musí obsahovať aspoň jeden podvýraz (*redex*) v tvare

$$\mathrm{D}(\underline{x}, \rho_2, \rho_3) \quad g_1(\underline{y_1}, \ldots, \underline{y_{m_1}}) \quad \ldots \quad g_k(\underline{y_1}, \ldots, \underline{y_{m_k}}) \quad f(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}).$$

Jeden výpočtový krok spočíva v nájdení najľavejšieho redexu a jeho nahradením kontrakciou podľa nasledujúcich pravidiel

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}(\underline{0}, \rho_2, \rho_3) &\rhd_1 \rho_3 \\
\mathrm{D}(\underline{x+1}, \rho_2, \rho_3) &\rhd_1 \rho_2 \\
g_i(\underline{y_1}, \ldots, \underline{y_{m_i}}) &\rhd_1 \underline{g_i(y_1, \ldots, y_{m_i})} \qquad \text{pre } i = 1, \ldots, k \\
f(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}) &\rhd_1 \tau[f; \underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}].
\end{aligned}$$

Tak dostaneme nový uzavretý term σ a píšeme

$$\rho \rhd_1 \sigma.$$

Výpočtový model

Viac krokov výpočtu

Označenie:

- $\rho_1 \rhd_k \rho_2$, ak výraz ρ_1 sa redukuje do výrazu ρ_2 po k krokoch. To znamená, že existujú uzavreté rekurzívne termy $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k$ také, že

$$\rho_1 \equiv \sigma_0 \rhd_1 \sigma_1 \rhd_1 \cdots \rhd_1 \sigma_k \equiv \rho_2.$$

  Umožníme tiež prípad $k = 0$. Vtedy $\rho_1 \rhd_0 \rho_2 \leftrightarrow \rho_1 \equiv \rho_2$.
- $\rho_1 \rhd \rho_2$, ak $\rho_1 \rhd_k \rho_2$ pre nejaké k.

Platí

$$\rho \rhd \sigma_1 \wedge \rho \rhd \sigma_2 \rightarrow \sigma_1 \rhd \sigma_2 \vee \sigma_2 \rhd \sigma_1$$
$$\underline{y} \rhd \sigma \leftrightarrow \sigma \equiv \underline{y}.$$

Ak $\rho \rhd \underline{y}$, tak vravíme, že výpočet skončil s výsledkom y.

Výpočtový model

Lema (Korektnosť)

Platí

$$f(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}) \rhd \underline{y} \to f(x_1, \ldots, x_n) \simeq y.$$

Dôkaz.

Indukciou podľa k dokážeme, že pre každý uzavretý term ρ platí

$$\rho \rhd_k \underline{y} \to \rho \simeq y. \tag{1}$$

Nech $f(\underline{\vec{x}}) \rhd \underline{y}$. Potom

$$f(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}) \rhd_1 \tau[f; \underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}] \rhd_k \underline{y}$$

pre nejaké číslo k. Odtiaľ

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \ldots, x_n] \overset{(1)}{\simeq} y.$$

Výpočtový model

Lema (Úplnosť)

Platí

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq y \to f(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}) \rhd \underline{y}.$$

Dôkaz.

Podľa prvej vety o rekurzii čiastočná funkcia f sa dá vyjadriť v tvare $f = \bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$, kde $f_0, f_1, f_2, \ldots$ je reťazec definovaný predpisom

$$f_0 = \emptyset^{(n)} \qquad\qquad f_{i+1}(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f_i; x_1, \ldots, x_n].$$

Indukciou podľa i dokážeme, že platí

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) \simeq y \to f(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}) \rhd \underline{y}. \tag{1}$$

Odtiaľ dostaneme

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq y \Rightarrow \exists i\, f_i(x_1, \ldots, x_n) \simeq y \overset{(1)}{\Rightarrow} f(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}) \rhd \underline{y}.$$

Výpočtový model

Veta (Ekvivalentnosť výpočtovej a definičnej sémantiky)

Platí

$$f(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}) \triangleright \underline{y} \leftrightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \simeq y.$$

Dôkaz.

Priamy dôsledok predošlých dvoch pomocných tvrdení.

Poznámka

Toto je druhá časť originálnej Kleeneho prvej vety o rekurzii.

Záver

9. cvičenie

- Výsledky s komentárom nájdete na webe.

10. cvičenie

- Začína v stredu o 09:50 v miestnosti F1-248.
- Semestrálny test.

11. prednáška

- Aritmetizácia výpočtového modelu pre čiastočne rekurzívne funkcie.