

1-INF-450 Logika pre informatikov

Zimný semester 2014/15

8. prednáška

Ján Komara

Obsah 8. prednášky

Zopakovanie

Poza primitívnu rekurziu

Ackermannova funkcia

Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie

Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií

Obecne rekurzívne funkcie

μ -rekurzívne funkcie

Záver

Zopakovanie

Cieľ predmetu

- ▶ Vybudovať matematické základy deklaratívnych programovacích jazykov.

Stručná osnova predmetu

- ▶ Primitívne rekurzívne funkcie
 - ▶ Aritmetizácia dátových štruktúr.
 - ▶ Regulárne rekurzívne definície s mierou.
- ▶ Obecne rekurzívne funkcie
 - ▶ Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií:
 - ▶ Ackermannova funkcia (1928),
 - ▶ univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie.
- ▶ Čiastočne rekurzívne funkcie
 - ▶ Kleeneho prvá veta o rekurzii (veta o pevnom bode).
 - ▶ Kleeneho veta o normálnej forme.
 - ▶ Churchova téza a algoritmicky nerozhodnuteľné problémy.

Zopakovanie

Syntaktická forma rekúzie s mierou $\mu[\vec{x}]$

Sú to definície v tvare

$$f(\vec{x}) = \tau [[f]_{\vec{x}}^{\mu}; \vec{x}]. \quad (1)$$

Term na pravej strane rovnosti vznikol s termu $\tau[f; \vec{x}]$ nahradením každej rekurzívnej aplikácie $f(\vec{\rho})$ výrazom

$$[f]_{\vec{x}}(\vec{\rho}) \equiv \text{if } \mu[\vec{\rho}] < \mu[\vec{x}] \text{ then } f(\vec{\rho}) \text{ else } 0.$$

Každá rekurzívna aplikácia $f(\vec{\rho})$ v (1) je teda strážená podmienkou $\mu[\vec{\rho}] < \mu[\vec{x}]$.

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na rekúziu s mierou.

Zopakovanie

Regulárna rekúzia s mierou $\mu[\vec{x}]$

Sú to definície v tvare

$$f(\vec{x}) = \tau[f; \vec{x}], \quad (1)$$

pre ktoré sú splnené podmienky regularity. Tie majú tvar:

$$\Gamma_{f(\vec{\rho})}^{\tau}[f; \vec{x}] \rightarrow \mu[\vec{\rho}[f; \vec{x}]] < \mu[\vec{x}]$$

pre každú rek. aplikáciu $f(\vec{\rho})$ stráženú podmienkou $\Gamma_{f(\vec{\rho})}^{\tau}$ v τ .

Splnenie podmienok sa overuje pre funkciu definovanú rovnosťou:

$$f(\vec{x}) = \tau[[f]_{\vec{x}}^{\mu}; \vec{x}].$$

Táto funkcia je potom jediným riešením funkcionálnej rovnice (1).

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na regulárnu rekúziu s mierou.

Zopakovanie

Charakterizačný problém

Veta

Trieda primitívne rekurzívnych funkcií je najmenšia trieda funkcií, ktorá obsahuje funkciu nasledovníka $S(x) = x + 1$, funkciu predchodcu $x \div 1$ a je uzavretá na explicitné definície a regulárnu rekurziu s mierou.

Ackermannova funkcia

Ackermannova funkcia (1928)

Postupnosť binárnych p.r. funkcií A_x ($x = 0, 1, 2, \dots$):

$$A_0(y, z) = y + z$$

$$A_1(y, z) = y \cdot z$$

$$A_2(y, z) = y^z.$$

Definícia $\lambda xyz. A_x(y, z)$ pomocou vnorenej dvojitej rekurzie

$$A_0(y, z) = y + z$$

$$A_{x+1}(y, 0) = (x =_* 1) + (x \geq_* 2) \cdot y$$

$$A_{x+1}(y, z + 1) = A_x(y, A_{x+1}(y, z)).$$

Táto funkcia nie je primitívne rekurzívna, pretože jej diagonalizácia $\lambda x. A_x(x, x)$ rastie rýchlejšie ako každá unárna p.r. funkcia.

Ackermannova funkcia

Ackermann-Péterovej funkcia

Definícia pomocou vnorenej dvojitej rekurzie

$$\begin{aligned}A(0, y) &= y + 1 \\A(x + 1, 0) &= A(x, 1) \\A(x + 1, y + 1) &= A(x, A(x + 1, y)).\end{aligned}$$

Napríklad:

$$\begin{aligned}A(1, y) &= y + 2 \\A(2, y) &= 2 \cdot y + 3 = 2 \cdot (y + 3) \div 3 \\A(3, y) &= 8 \cdot 2^y \div 3 = 2^{y+3} \div 3.\end{aligned}$$

Funkcia nie je primitívne rekurzívna, pretože jej diagonalizácia $\lambda x. A(x, x)$ rastie rýchlejšie ako každá unárna p.r. funkcia

Ackermannova funkcia

Podmienky regularity pre Ackermann-Péterovej funkciu

Lexikografické usporiadanie dvojíc prirodzených čísel

$$(a, b) <_{\text{lex}} (c, d) \leftrightarrow a < c \vee a = c \wedge b < d.$$

Je to dobré usporiadanie: každá klesajúca postupnosť je konečná

$$(a_1, b_1) >_{\text{lex}} (a_2, b_2) >_{\text{lex}} (a_3, b_3) >_{\text{lex}} (a_4, b_4) >_{\text{lex}} \cdots$$

Podmienky regularity pre funkciu $A(x, y)$ sú triviálne splnené:

$$\begin{aligned}(x, 1) &<_{\text{lex}} (x + 1, 0) \\(x + 1, y) &<_{\text{lex}} (x + 1, y + 1) \\(x, A(x + 1, y)) &<_{\text{lex}} (x + 1, y + 1).\end{aligned}$$

Definícia transfinitnou rekúziou do dobrého usporiadania $<_{\text{lex}}$.

Ackermannova funkcia

Graf Ackermann-Péterovej funkcie

Funkcia $A(x, y)$ nie je primitívne rekurzívna, ale jej graf

$$G(x, y, z) \leftrightarrow A(x, y) = z$$

je primitívne rekurzívny predikát.

Idea dôkazu: vyjadriť graf v tvare

$$G(x, y, z) \leftrightarrow \exists s \leq b(z) (Cvs(s) \wedge \langle x, y, z \rangle \varepsilon s),$$

kde

- ▶ $Cvs(s)$ je p.r. predikát, ktorý platí, ak s je postupnosť histórie výpočtu Ackermann-Péterovej funkcie;
- ▶ $b(z)$ je p.r. funkcia, ktorá dáva odhad na veľkosť takejto postupnosti pre výsledok výpočtu z .

Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie

Špecifikácia interpretra

Interpreter programovacieho jazyka p.r. odvodení je binárna funkcia $e \bullet x$, ktorá má tieto dve základné vlastnosti:

- ▶ Pre každý n -árny p.r. funkčný symbol f a n -ticu čísel x_1, \dots, x_n platí rovnosť:

$$\ulcorner f \urcorner \bullet \langle x_1, \dots, x_n \rangle = f^{\mathcal{N}}(x_1, \dots, x_n).$$

Tu $\ulcorner f \urcorner \in \mathbb{N}$ je kód a $f^{\mathcal{N}} : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ interpretácia symbolu f .

- ▶ Pre každé číslo e , unárna funkcia f definovaná vzťahom

$$f(x) = e \bullet x$$

je primitívne rekurzívna funkcia.

Primitívne rekurzívne odvodenia sú reprezentované p.r. funkčnými symbolmi.

Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie

Implementácia interpretra

Definícia interpretra pomocou vnorenej dvojitej rekurzíe:

$$\mathbf{Z} \bullet x = 0$$

$$\mathbf{S} \bullet x = x + 1$$

$$\mathbf{I}_i^n \bullet x = [x]_i^n$$

$$\langle g, gs \rangle \bullet x = \langle g \bullet x, gs \bullet x \rangle$$

$$\mathbf{Comp}_m^n(h, gs) \bullet x = h \bullet (gs \bullet x)$$

$$\mathbf{Rec}_n(g, h) \bullet \langle 0, y \rangle = g \bullet y$$

$$\mathbf{Rec}_n(g, h) \bullet \langle x + 1, y \rangle = h \bullet \langle x, \mathbf{Rec}_n(g, h) \bullet \langle x, y \rangle, y \rangle.$$

Podmienky regularity pre funkciu $e \bullet x$ sú triviálne splnené, napr.

$$(\mathbf{Rec}_n(g, h), \langle x, y \rangle) <_{\text{lex}} (\mathbf{Rec}_n(g, h), \langle x + 1, y \rangle)$$

$$(h, \langle x, \mathbf{Rec}_n(g, h) \bullet \langle x, y \rangle, y \rangle) <_{\text{lex}} (\mathbf{Rec}_n(g, h), \langle x + 1, y \rangle).$$

Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie

Definícia univerzálnej funkcie

Vravíme, že $(n+1)$ -árna funkcia U_n je univerzálnou pre triedu n -árnych p.r. funkcií, ak sú splnené tieto podmienky:

- ▶ Pre každú n -árnu p.r. funkciu f existuje číslo e také, že pre každú n -ticu čísel x_1, \dots, x_n platí rovnosť

$$U_n(e, x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n).$$

- ▶ Pre každé číslo e je n -árna funkcia f definovaná vzťahom

$$f(x_1, \dots, x_n) = U_n(e, x_1, \dots, x_n)$$

primitívne rekurzívna.

Funkciu U_n definujeme predpisom

$$U_n(e, x_1, \dots, x_n) = e \bullet \langle x_1, \dots, x_n \rangle.$$

Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie

Univerzálna funkcia U_1 nie je primitívne rekurzívna

Dôkaz sporom: predpokladajme, že funkcia U_1 je primitívne rekurzívna. Potom aj unárna funkcia f definovaná vzťahom

$$f(x) = U_1(x, x) + 1 \quad (1)$$

je primitívne rekurzívna. Existuje teda číslo e také, že pre každé číslo x platí rovnosť

$$U_1(e, x) = f(x). \quad (2)$$

Postupnými úpravami teraz dostaneme

$$f(e) \stackrel{(1)}{=} U_1(e, e) + 1 \stackrel{(2)}{=} f(e) + 1.$$

Spor.

Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie

Univerzálna funkcia U_n nie je primitívne rekurzívna

Dôkaz sporom: predpokladajme, že funkcia U_n je primitívne rekurzívna. Potom aj n -árna funkcia f definovaná vzťahom

$$f(x_1, \dots, x_n) = U_n(x_1, x_1, \dots, x_n) + 1 \quad (1)$$

je primitívne rekurzívna. Existuje teda číslo e také, že pre každú n -ticu čísel x_1, \dots, x_n platí rovnosť

$$U_n(e, x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n). \quad (2)$$

Postupnými úpravami teraz dostaneme

$$f(e, \dots, e) \stackrel{(1)}{=} U_n(e, e, \dots, e) + 1 \stackrel{(2)}{=} f(e, \dots, e) + 1.$$

Spor.

Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie

Graf univerzálnej funkcie U_1 nie je primitívne rekurzívny

Dôkaz sporom: predpokladajme, že graf univerzálnej funkcie

$$G_1(e, x, y) \leftrightarrow U_1(e, x) = y \quad (1)$$

je p.r. predikát. Potom je primitívne rekurzívny aj unárny predikát

$$P(x) \leftrightarrow G_1(x, x, 0). \quad (2)$$

Existuje teda číslo e také, že pre každé číslo x platí rovnosť

$$U_1(e, x) = P_*(x). \quad (3)$$

Postupnými úpravami teraz dostaneme spor:

$$P(e) \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} G_1(e, e, 0) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} U_1(e, e) = 0 \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} P_*(e) = 0 \Leftrightarrow \neg P(e).$$

Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie

Graf univerzálnej funkcie U_n nie je primitívne rekurzívny

Dôkaz sporom: predpokladajme, že graf univerzálnej funkcie

$$G_n(e, x_1, \dots, x_n, y) \leftrightarrow U_n(e, x_1, \dots, x_n) = y \quad (1)$$

je p.r. predikát. Potom je primitívne rekurzívny aj n -árny predikát

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow G_n(x_1, x_1, \dots, x_n, 0). \quad (2)$$

Existuje teda číslo e také, že pre každú n -ticu čísel x_1, \dots, x_n platí

$$U_n(e, x_1, \dots, x_n) = P_*(x_1, \dots, x_n). \quad (3)$$

Postupnými úpravami teraz dostaneme spor:

$$\begin{aligned} P(e, \dots, e) &\stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} G_n(e, e, \dots, e, 0) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} U_n(e, e, \dots, e) = 0 \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow P_*(e, \dots, e) = 0 \Leftrightarrow \neg P(e, \dots, e). \end{aligned}$$

Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií

Dobre založené relácie

Vravíme, že relácia $\vec{x} \prec \vec{y}$ na \mathbb{N}^n je dobre založená (tiež noetherianská), ak každá klesajúca postupnosť

$$\vec{x}_1 \succ \vec{x}_2 \succ \vec{x}_3 \succ \vec{x}_4 \succ \dots$$

je konečná. Tu $\vec{x} \succ \vec{y} \leftrightarrow \vec{y} \prec \vec{x}$.

Úplné dobre založené usporiadanie sa nazýva dobré usporiadanie.

Príklady

- ▶ Relácia $\vec{x} \prec \vec{y}$ indukovaná mierou $\mu[\vec{x}]$ do štandardného usporiadania prirodzených čísel:

$$\vec{x} \prec \vec{y} \leftrightarrow \mu[\vec{x}] < \mu[\vec{y}].$$

- ▶ Lexikografické usporiadanie dvojíc prirodzených čísel:

$$(a, b) <_{\text{lex}} (c, d) \leftrightarrow a < c \vee a = c \wedge b < d.$$

Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií

Syntaktická forma rekurzívnej definície do dobre založenej relácie \prec

Sú to definície v tvare

$$f(\vec{x}) = \tau[[f]_{\vec{x}}^{\prec}; \vec{x}]. \quad (1)$$

Term na pravej strane rovnosti vznikol s termu $\tau[f; \vec{x}]$ nahradením každej rekurzívnej aplikácie $f(\vec{\rho})$ výrazom

$$[f]_{\vec{x}}^{\prec}(\vec{\rho}) \equiv \text{if } \vec{\rho} \prec \vec{x} \text{ then } f(\vec{\rho}) \text{ else } 0.$$

Každá rekurzívna aplikácia $f(\vec{\rho})$ v (1) je teda strážená podmienkou $\vec{\rho} \prec \vec{x}$.

Veta

Funkcionálna rovnica (1) má práve jedno riešenie.

Dôkaz

Riešiteľnosť funkcionálnej rovnice vyplýva z Kleeneho vety o pevnom bode (10. prednáška).

Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií

Regulárna rekurzia do dobre založenej relácie \prec

Sú to definície v tvare

$$f(\vec{x}) = \tau[f; \vec{x}], \quad (1)$$

pre ktoré sú splnené podmienky regularity.

Podmienky regularity majú tvar:

$$\Gamma_{f(\vec{\rho})}^{\tau}[f; \vec{x}] \rightarrow \vec{\rho}[f; \vec{x}] \prec \vec{x}$$

pre každú rekurzívnu aplikáciu $f(\vec{\rho})$ funkcie f , ktorá je strážená podmienkou $\Gamma_{f(\vec{\rho})}^{\tau}$ v terme τ .

Splnenie podmienok pre funkciu definovanou pridruženou rovnosťou

$$f(\vec{x}) = \tau[[f]_{\vec{x}}^{\prec}; \vec{x}].$$

Táto funkcia je potom jediným riešením funkcionálnej rovnice (1).

Obecne rekurzívne funkcie

Definícia triedy obecne rekurzívnych funkcií

- ▶ Základné funkcie:
 - ▶ funkcia nasledovníka $S(x) = x + 1$,
 - ▶ funkcia predchodcu $x \dot{-} 1$.
- ▶ Explicitné definície:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \tau[x_1, \dots, x_n].$$

- ▶ Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \tau[f; x_1, \dots, x_n].$$

Predikát je obecne rekurzívny, ak taká je jeho charakteristická funkcia.

Obecne rekurzívne funkcie

Príklady obecne rekurzívnych funkcií

- ▶ Ackermannova funkcia.
- ▶ Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie.

Ani jedna z týchto funkcií nie je primitívne rekurzívna.

Veta

Trieda obecne rekurzívnych funkcií je primitívne rekurzívne uzavretá.

Dôsledok

- ▶ *Každá primitívne rekurzívna funkcia je obecne rekurzívna.*
- ▶ *Každý primitívne rekurzívny predikát je obecne rekurzívny.*
- ▶ *Obecne rekurzívne predikáty sú uzavreté na explicitné definície predikátov s ohraničenými formulami.*

Obecne rekurzívne funkcie

Dôkaz vety

- ▶ Funkcia nasledovníka S je základná obecne rekurzívna funkcia.
- ▶ Obecna rekurzivnost' Z plynie z tohoto vyjadrenia $Z(x) = 0$.
- ▶ Obecna rekurzivnost' I_i^n plynie z vyjadrenia $I_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$.
- ▶ Obecne rekurzívne funkcie sú uzavreté na kompozíciu funkcií:

$$f(x_1, \dots, x_n) = h(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Je to totiž špeciálny prípad explicitnej definície.

- ▶ Obecne rekurzívne funkcie sú uzavreté na primitívnu rekurziu:

$$f(0, \vec{y}) = g(\vec{y}) \quad f(x + 1, \vec{y}) = h(x, f(x, \vec{y}), \vec{y}).$$

Je to špeciálny prípad regulárnej rekurzie

$$f(x, \vec{y}) = \mathbf{if } x \neq 0 \mathbf{ then } h(x \div 1, f(x \div 1, \vec{y}), \vec{y}) \mathbf{ else } g(\vec{y})$$

do dobre založenej relácie $(x_1, \vec{y}_1) \prec (x_2, \vec{y}_2) \leftrightarrow x_1 < x_2$.

Obecne rekurzívne funkcie

Regulárna minimalizácia

Sú to definície funkcií v tvare

$$f(x_1, \dots, x_n) = \text{najmenšie číslo } y \text{ také, že platí } \varphi[x_1, \dots, x_n, y],$$

kde φ je ohraničená formula spĺňajúca podmienku regularity

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y \varphi[x_1, \dots, x_n, y].$$

Skrátený zápis

$$f(x_1, \dots, x_n) = \mu y [\varphi[x_1, \dots, x_n, y]].$$

Veta

Trieda obecne rekurzívnych funkcií je uzavretá na definície funkcií regulárnou minimalizáciou.

Obecne rekurzívne funkcie

Dôkaz.

Uvažujme regulárnu minimalizáciu v tvare

$$f(\vec{x}) = \mu y [\varphi[\vec{x}, y]].$$

Obecná rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia:

$$g(y, \vec{x}) = \begin{cases} y & \text{ak } \exists z \leq y \varphi[\vec{x}, z], \text{ t.j. } y \geq f(\vec{x}); \\ g(y + 1, \vec{x}) & \text{ak } \forall z \leq y \neg \varphi[\vec{x}, z], \text{ t.j. } y < f(\vec{x}). \end{cases}$$

$$f(\vec{x}) = g(0, \vec{x}).$$

Obecne rekurzívna funkcia $g(y, \vec{x})$ je definovaná regulárnou rekurzíou do dobrého usporiadania

$$(y_1, \vec{x}_1) \prec (y_2, \vec{x}_2) \leftrightarrow f(\vec{x}_1) \div y_1 < f(\vec{x}_2) \div y_2.$$

Je to (neprediktívna) spätná rekurzia s hornou závorou $f(\vec{x})$.

Obecne rekurzivne funkcie

Veta

Funkcia je obecne rekurzivna práve vtedy, keď jej graf je obecne rekurzivny predikát.

Dôkaz.

Nech $G(\vec{x}, y)$ je graf funkcie $f(\vec{x})$. Platí:

$$\begin{aligned}G(\vec{x}, y) &\leftrightarrow f(\vec{x}) = y \\ f(\vec{x}) &= \mu y [G(\vec{x}, y)].\end{aligned}$$

Veta je tak jednoduchý dôsledok predošlých tvrdení.

μ -rekurzívne funkcie

Definícia triedy μ -rekurzívnych funkcií

▶ Základné funkcie:

- ▶ konštantná funkcia $Z(x) = 0$,
- ▶ funkcia nasledovníka $S(x) = x + 1$,
- ▶ identity (projekcie) $I_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$ pre každé $1 \leq i \leq n$.

▶ Kompozícia (skladanie) funkcií:

$$f(x_1, \dots, x_n) = h(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)).$$

▶ Primitívna rekurzia:

$$\begin{aligned} f(0, y_1, \dots, y_n) &= g(y_1, \dots, y_n) \\ f(S(x), y_1, \dots, y_n) &= h(x, f(x, y_1, \dots, y_n), y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

▶ Regulárna minimalizácia:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \mu y [g(y, x_1, \dots, x_n) = 1].$$

μ -rekurzívne funkcie

Definícia

Predikát je μ -rekurzívny, ak taká je jeho charakteristická funkcia.

Veta

Trieda μ -rekurzívnych funkcií je primitívne rekurzívne uzavretá.

Dôsledok

- ▶ *Každá primitívne rekurzívna funkcia je μ -rekurzívna.*
- ▶ *Každý primitívne rekurzívny predikát je μ -rekurzívny.*
- ▶ *μ -rekurzívne funkcie sú uzavreté na explicitné definície.*
- ▶ *μ -rekurzívne predikáty sú uzavreté na explicitné definície predikátov s ohraničenými formulami.*
- ▶ *μ -rekurzívne funkcie sú uzavreté na vnorenú jednoduchú rekurziu.*

μ -rekurzívne funkcie

Veta

Trieda μ -rekurzívnych funkcií je uzavretá na definície funkcií regulárnou minimalizáciou.

Dôkaz.

Uvažujme regulárnu minimalizáciu v tvare

$$f(x_1, \dots, x_n) = \mu y [\varphi[x_1, \dots, x_n, y]].$$

μ -rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia:

$$\begin{aligned} P(y, x_1, \dots, x_n) &\leftrightarrow \varphi[x_1, \dots, x_n, y] \\ f(x_1, \dots, x_n) &= \mu y [P_*(y, x_1, \dots, x_n) = 1]. \end{aligned}$$

μ -rekurzívne funkcie

Veta

Trieda μ -rekurzívnych funkcií je uzavretá na regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií.

Dôkaz

Regulárna rekúzia do dobre založenej relácie \prec :

$$f(\vec{x}) = \tau[f; \vec{x}].$$

Špecifikácia μ -rekurzívnej aproximačnej funkcie:

$$\begin{aligned} \forall \vec{x} \exists z f^+(z, \vec{x} + 1) &= f(\vec{x}) + 1 \\ z_1 \leq z_2 \wedge f^+(z_1, \vec{x} + 1) &= y + 1 \rightarrow f^+(z_2, \vec{x} + 1) = y + 1. \end{aligned}$$

μ -rekurzívnosť funkcie f plyní potom z tohoto vyjadrenia:

$$d(\vec{x}) = \mu z [f^+(z, \vec{x} + 1) \neq 0] \quad f(\vec{x}) = f^+(d(\vec{x}), \vec{x} + 1) \div 1.$$

Označenie: $\vec{x} + 1 \equiv x_1 + 1, \dots, x_n + 1$.

μ -rekurzívne funkcie

Konštrukcia aproximačnej funkcie, časť prvá

Aproximačná funkcia D^+ diskriminačnej funkcie D :

$$D^+(x, y, z) = D(x, D(x \div 1, y, z), 0).$$

Pre p.r. funkciu D^+ platia vzťahy

$$\begin{aligned} D^+(0, y, z) &= 0 & D^+(x + 1, y, z) &= D(x, y, z) \\ D^+(x + 1, y + 1, z + 1) &= D(x, y, z) + 1. \end{aligned}$$

Aproximačná funkcia g^+ pomocnej m -árnej funkcie g :

$$g^+(\vec{y}) = \begin{cases} g(\vec{z}) + 1 & \text{ak } \vec{y} = \vec{z} + 1 \text{ pre nejaké } \vec{z}, \\ 0 & \text{ináč.} \end{cases}$$

Pre μ -rekurzívnu funkciu g^+ platia vzťahy

$$\bigvee_{i=1}^m y_i = 0 \rightarrow g^+(\vec{y}) = 0 \quad g^+(\vec{y} + 1) = g(\vec{y}) + 1.$$

μ -rekurzívne funkcie

Konštrukcia aproximačnej funkcie, časť druhá

Aproximačný term $\rho^+[f^+(z, \cdot); \vec{x}]$ pre podterm ρ termu τ :

$$x_i^+ \equiv x_i + 1$$

$$c^+ \equiv c + 1$$

$$D(\rho_1, \rho_2, \rho_3)^+ \equiv D^+(\rho_1^+, \rho_2^+, \rho_3^+)$$

$$g(\rho_1, \dots, \rho_m)^+ \equiv g^+(\rho_1^+, \dots, \rho_m^+)$$

$$f(\rho_1, \dots, \rho_n)^+ \equiv f^+(z, \rho_1^+, \dots, \rho_n^+).$$

Definícia aproximačnej funkcie má tvar vnorenej jednoduchej rekurzie:

$$f^+(0, \vec{x}) = 0$$

$$f^+(z + 1, \vec{x}) = \tau^+[f^+(z, \cdot); \vec{x}].$$

Aproximačná funkcia je preto μ -rekurzívna.

μ -rekurzívne funkcie

Lema

Trieda μ -rekurzívnych funkcií je obecne rekurzívne uzavretá.

Dôsledok: každá obecne rekurzívna funkcia je μ -rekurzívna.

Dôkaz

- ▶ Trieda μ -rekurzívnych funkcií je primitívne rekurzívne uzavretá.
Dôsledok:

- ▶ Funkcia nasledovníka $S(x) = x + 1$ a funkcia predchodcu $x \div 1$ sú μ -rekurzívne funkcie.
- ▶ Trieda je uzavretá na explicitné definície funkcií:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \tau[x_1, \dots, x_n].$$

- ▶ Trieda μ -rekurzívnych funkcií je uzavretá na regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \tau[f; x_1, \dots, x_n].$$

μ -rekurzívne funkcie

Lema

Trieda obecné rekurzívnych funkcií je μ -rekurzívne uzavretá.

Dôsledok: každá μ -rekurzívna funkcia je obecné rekurzívna.

Dôkaz

- ▶ Trieda obecné rekurz. funkcií je primitívne rekurz. uzavretá:
 - ▶ S, Z, I_i^n sú obecné rekurzívne funkcie.
 - ▶ Trieda je uzavretá na operátor kompozície funkcií:

$$f(\vec{x}) = h(g_1(\vec{x}), \dots, g_m(\vec{x}))$$

a na operátor primitívnej rekurzcie:

$$f(0, \vec{y}) = g(\vec{y}) \quad f(x+1, \vec{y}) = h(x, f(x, \vec{y}), \vec{y}).$$

- ▶ Trieda obecné rekurzívnych funkcií je uzavretá na operátor regulárnej minimalizácie:

$$f(\vec{x}) = \mu y [g(y, \vec{x}) = 1].$$

μ -rekurzívne funkcie

Veta

Trieda obecné rekurzívnych funkcií je totožná s triedou μ -rekurzívnych funkcií.

Dôkaz.

Priamy dôsledok predošlých tvrdení.

Churchova téza (1936)

Trieda intuitívne vypočítateľných funkcií nad oborom prirodzených čísel je totožná s triedou obecné rekurzívnych funkcií.

Modely vypočítateľných funkcií (do roku 1936)

- ▶ obecné rekurzívne funkcie [Herbrand-Gödel, 1931, 1934],
- ▶ λ -definovateľné funkcie [Church, 1932],
- ▶ μ -rekurzívne funkcie [Kleene, 1935, 1952].

Záver

7. cvičenie

- ▶ Výsledky s komentárom nájdete na webe.

8. cvičenie

- ▶ Začína v stredu o 09:50 v miestnosti F1-248.
- ▶ Pracujte samostatne.
- ▶ Úlohy odovzdať najneskôr do 12:00 v pondelok budúci týždeň.

9. prednáška

- ▶ Návrh programovacieho jazyka deklaratívnej paradigmy.
- ▶ Efektívne operácie na primitívne rekurzívnych indexoch.