

1-INF-450 Logika pre informatikov

Zimný semester 2014/15

5. prednáška

Ján Komara

Obsah 5. prednášky

Zopakovanie

Párovacia funkcia

Aritmetizácia karteziánskeho súčinu

Aritmetizácia konečných postupností

'Course-of-values' rekurzia

Záver

Zopakovanie

Primitívne rekurzívne funkcie

- ▶ Základný vývoj primitívne rekurzívnych funkcií.
- ▶ Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia.
- ▶ Párovacia funkcia a aritmetizácia dátových štruktúr.
- ▶ Vnorená jednoduchá rekurzia:

$$f(0, y) = g(y)$$

$$f(x + 1, y) = h\left(x, f(x, s_1(x, y)), f(x, s_2(x, y, f(x, s_1(x, y)))), y\right).$$

- ▶ Regulárne rekurzívne definície s mierou:

$$f(\vec{x}) = \tau[f; \vec{x}].$$

Podmienka regularity $\Gamma_{f(\vec{\rho})} \rightarrow \mu[\vec{\rho}] < \mu[\vec{x}]$ pre rekurzívne volanie $f(\vec{\rho})$ funkcie f v terme τ .

Zopakovanie

Explicitné definície predikátov

Sú to definície v tvare

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi[x_1, \dots, x_n].$$

Veta

Primitívne rekurzívne predikáty sú uzavreté na explicitné definície predikátov s ohraničenými formulami.

Ohraničená minimalizácia

Sú to definície funkcií v tvare (φ je ohraničená formula)

$$f(\vec{x}) = \mu y \leq \tau[\vec{x}] [\varphi[\vec{x}, y]].$$

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na definície funkcií ohraničenou minimalizáciou.

Zopakovanie

Príklady primitívne rekurzívnych funkcií a predikátov

- ▶ Ternárna diskriminačná funkcia

$$D(x, y, z) = v \leftrightarrow x \neq 0 \wedge v = y \vee x = 0 \wedge v = z.$$

Notačná konvencia

$$D(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \equiv \text{if } \tau_1 \neq 0 \text{ then } \tau_2 \text{ else } \tau_3$$

$$D(P_*(\vec{\tau}_1), \tau_2, \tau_3) \equiv \text{if } P(\vec{\tau}_1) \text{ then } \tau_2 \text{ else } \tau_3.$$

- ▶ Rovnosti a nerovnosti:

$$x = y \quad x \neq y \quad x \leq y \quad x < y \quad x \geq y \quad x > y.$$

Párovacia funkcia

Cantorova párovacia funkcia

$J(x, y)$	0	1	2	3	4	5	6	...
0	0	1	3	6	10	15	21	...
1	2	4	7	11	16	22	29	...
2	5	8	12	17	23	30	38	...
3	9	13	18	24	31	39	48	...
4	14	19	25	32	40	49	59	...
5	20	26	33	41	50	60	71	...
6	27	34	42	51	61	72	84	...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	

$$J(x, y) = \sum_{i=0}^{x+y} i + x.$$

Párovacia funkcia

Cantorova párovacia funkcia (modifikovaná verzia)

$\langle x, y \rangle$	0	1	2	3	4	5	6	...
0	1	2	4	7	11	16	22	...
1	3	5	8	12	17	23	30	...
2	6	9	13	18	24	31	39	...
3	10	14	19	25	32	40	49	...
4	15	20	26	33	41	50	60	...
5	21	27	34	42	51	61	72	...
6	28	35	43	52	62	73	85	...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=0}^{x+y} i + 1 + x.$$

Párovacia funkcia

Vlastnosti párovacej funkcie

Modifikovaná verzia Cantorovej párovacej funkcie má tieto základné vlastnosti:

$$\begin{aligned}\langle x_1, x_2 \rangle = \langle y_1, y_2 \rangle &\rightarrow x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \\ x < \langle x, y \rangle &\wedge y < \langle x, y \rangle \\ x = 0 &\vee \exists y \exists z x = \langle y, z \rangle.\end{aligned}$$

Dôsledok:

$$0 \neq \langle x, y \rangle.$$

Číslo 0 je jediný atom.

Párovacia funkcia

Projekcie

Unárne projekcie π_1 a π_2 spĺňajú tieto identity:

$$\pi_1\langle x, y \rangle = x$$

$$\pi_2\langle x, y \rangle = y$$

$$\pi_1(0) = 0 = \pi_2(0).$$

Primitívna rekurzívnosť oboch funkcií plynie z tohoto vyjadrenia

$$\pi_1(x) = \mu y < x [\exists z < x x = \langle y, z \rangle]$$

$$\pi_2(x) = \mu z < x [\exists y < x x = \langle y, z \rangle].$$

Párovacia funkcia

Príklad

Fibonacciho postupnosť je p.r. funkcia:

$$f_0 = 0 \quad f_1 = 1 \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

Uvažujme totiž funkciu

$$g(n) = \langle f_n, f_{n+1} \rangle.$$

Platí teda

$$f_n = \pi_1 g(n).$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie g (a tým aj f_n) plynie z

$$\begin{aligned} g(0) &= \langle f_0, f_1 \rangle = \langle 0, 1 \rangle \\ g(n+1) &= \langle f_{n+1}, f_{n+2} \rangle = \langle \pi_2 g(n), f_{n+1} + f_n \rangle = \\ &= \langle \pi_2 g(n), \pi_2 g(n) + \pi_1 g(n) \rangle. \end{aligned}$$

Párovacia funkcia

Párová reprezentácia prirodzených čísel

0



$1 = \langle 0, 0 \rangle$



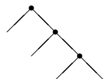
$2 = \langle 0, 1 \rangle$



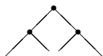
$3 = \langle 1, 0 \rangle$



$4 = \langle 0, 2 \rangle$



$5 = \langle 1, 1 \rangle$



$6 = \langle 2, 0 \rangle$



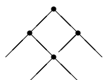
$7 = \langle 0, 3 \rangle$



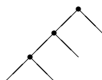
$8 = \langle 1, 2 \rangle$



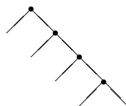
$9 = \langle 2, 1 \rangle$



$10 = \langle 3, 0 \rangle$



$11 = \langle 0, 4 \rangle$



$12 = \langle 1, 3 \rangle$



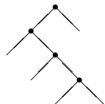
$13 = \langle 2, 2 \rangle$



$14 = \langle 3, 1 \rangle$



$15 = \langle 4, 0 \rangle$



Aritmetizácia karteziánskeho súčinu

Aritmetizácia

Kódom n -tice $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ je číslo

$$\ulcorner(x_1, \dots, x_n)\urcorner^n \in \mathbb{N},$$

ktoré je definované indukzívne takto:

$$\ulcorner\emptyset\urcorner^0 = 0$$

$$\ulcorner x \urcorner^1 = x$$

$$\ulcorner(x_1, x_2, \dots, x_n)\urcorner^n = \langle x_1, \ulcorner(x_2, \dots, x_n)\urcorner^{n-1} \rangle \quad \text{ak } n \geq 2.$$

Príklad

Kódovanie dvojíc a trojíc sa prekrýva:

$$\ulcorner(0, 1)\urcorner^2 = \langle 0, 1 \rangle = 2$$

$$\ulcorner(0, 0, 0)\urcorner^3 = \langle 0, \ulcorner(0, 0)\urcorner^2 \rangle = \langle 0, \langle 0, 0 \rangle \rangle = \langle 0, 1 \rangle = 2.$$

Aritmetizácia karteziánskeho súčinu

Notácia

Pre $n \geq 3$ zapisujeme $\langle x_1, \langle x_2, \dots, x_n \rangle \rangle$ skrátene $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$:

$$\ulcorner \langle x_1, \dots, x_n \rangle \urcorner^n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle.$$

Vlastnosť byť kódom n -tice prirodzených čísel

Binárny primitívne rekurzívny predikát $Tuple(n, x)$ platí, ak číslo x je kódom nejakej n -tice prirodzených čísel:

$$Tuple(n, x) \leftrightarrow n = 0 \wedge x = 0 \vee n = 1 \vee n \geq 2 \wedge \pi_2^{n-2}(x) \neq 0.$$

Zdôvodnenie pre $n \geq 2$:

$$\exists x_1 \dots \exists x_n x = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \leftrightarrow \pi_2^{n-2}(x) \neq 0.$$

Aritmetizácia karteziánskeho súčinu

Projekcia

Zobecnením projekcií π_1 a π_2 je ternárna funkcia $[x]_i^n$ taká, že

$$[\langle x_1, \dots, x_n \rangle]_i^n = x_i \quad \text{pre } 1 \leq i \leq n.$$

Primitívna rekurzívnosť plynie z tohoto vyjadrenia

$$[x]_i^n = \begin{cases} \pi_1 \pi_2^{i-1}(x) & \text{ak } 1 \leq i < n, \\ \pi_2^{n-1}(x) & \text{ak } i = n, \\ \dots & \text{ináč.} \end{cases}$$

Zdôvodnenie pre $n \geq 2$:

$$x = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \rightarrow \bigwedge_{i=1}^{n-1} x_i = \pi_1 \pi_2^{i-1}(x) \wedge x_n = \pi_2^{n-1}(x).$$

Aritmetizácia konečných postupností

Aritmetizácia

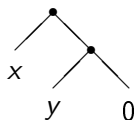
Kódom konečnej postupnosti $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ je číslo

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n, 0 \rangle.$$

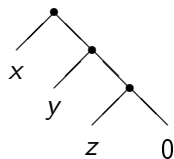
Kódom prázdnej postupnosti je číslo 0.



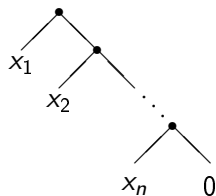
$$\langle x, 0 \rangle$$



$$\langle x, y, 0 \rangle$$



$$\langle x, y, z, 0 \rangle$$



$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n, 0 \rangle$$

Každé prirodzené číslo je kódom nejakej konečnej postupnosti.

Aritmetizácia konečných postupností

Dĺžka postupnosti

Funkcia $L(x)$ vypočíta dĺžku postupnosti x :

$$L \langle x_1, \dots, x_n, 0 \rangle = n.$$

Primitívna rekurzívnosť plynie z tohoto vyjadrenia

$$L(x) = \mu n \leq x [\pi_2^n(x) = 0].$$

Indexovacia funkcia

Binárna operácia $(x)_i$ vráti $(i+1)$ -vý prvok postupnosti x :

$$\langle \langle x_0, \dots, x_i, \dots, x_{n-1}, 0 \rangle \rangle_i = x_i \quad \text{pre } i < n.$$

Primitívna rekurzívnosť plynie z tohoto vyjadrenia

$$(x)_i = \pi_1 \pi_2^i(x).$$

'Course-of-values' rekurzia

Príklad

Fibonacciho postupnosť

$$f_0 = 0$$

$$f_1 = 1$$

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

Alternatívna definícia

$$f_0 = 0$$

$$f_{n+1} = D(n, f_n + f_{n \dot{-} 1}, 1).$$

Podmienky regularity

$$n < n + 1 \wedge n \dot{-} 1 < n + 1.$$

'Course-of-values' rekurzia

Príklad

Dĺžka zápisu čísla v binárnej reprezentácii

$$|0|_b = 0$$

$$|2x|_b = |x|_b + 1 \quad \text{ak } x \neq 0$$

$$|2x + 1|_b = |x|_b + 1.$$

Alternatívna definícia

$$|0|_b = 0$$

$$|x + 1|_b = |(x + 1) \div 2|_b + 1.$$

Podmienka regularity

$$(x + 1) \div 2 < x + 1.$$

'Course-of-values' rekurzia

'Course-of-values' rekurzia

Sú to definície v tvare

$$\begin{aligned}f(0, \vec{y}) &= \rho[\vec{y}] \\f(x + 1, \vec{y}) &= \tau[x, f(\xi_1[x, \vec{y}], \vec{y}), \dots, f(\xi_k[x, \vec{y}], \vec{y}), \vec{y}],\end{aligned}$$

kde

$$\xi_1[x, \vec{y}] \leq x \wedge \dots \wedge \xi_k[x, \vec{y}] \leq x.$$

Podmienky regularity:

$$\xi_1[x, \vec{y}] < x + 1 \wedge \dots \wedge \xi_k[x, \vec{y}] < x + 1.$$

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na 'course-of-values' rekurziu.

'Course-of-values' rekurzia

Dôkaz vety

Uvažujme definíciu v tvare

$$\begin{aligned}f(0) &= m \\ f(x+1) &= h(x, f \circ s(x)),\end{aligned}$$

kde $s(x) \leq x$.

Tvrdíme, že funkcia histórie \bar{f} pre f :

$$\begin{aligned}\bar{f}(x) &= \langle f(x), f(x-1), \dots, f(2), f(1), f(0), 0 \rangle \\ \text{L } \bar{f}(x) &= x+1 \wedge \forall z \leq x f(z) = (\bar{f}(x))_{x-z}\end{aligned}$$

je primitívne rekurzívna funkcia. Primitívna rekurzivnosť funkcie f potom plynie z tohoto vyjadrenia

$$f(x) = (\bar{f}(x))_0.$$

'Course-of-values' rekurzia

Primitívna rekurzivnosť funkcie histórie

Potrebujeme, aby platilo

$$\begin{aligned}\bar{f}(0) &= \langle f(0), 0 \rangle = \langle m, 0 \rangle \\ \bar{f}(x+1) &= \langle f(x+1), \bar{f}(x) \rangle = \langle h(x, f s(x)), \bar{f}(x) \rangle \\ &= \left\langle h\left(x, (\bar{f}(x))_{x \dot{-} s(x)}\right), \bar{f}(x)\right\rangle.\end{aligned}$$

Funkcia histórie je primitívne rekurzívna z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned}\bar{f}(0) &= \langle m, 0 \rangle \\ \bar{f}(x+1) &= \left\langle h\left(x, (\bar{f}(x))_{x \dot{-} s(x)}\right), \bar{f}(x)\right\rangle.\end{aligned}$$

Záver

4. cvičenie

- ▶ Výsledky s komentárom nájdete na webe.

5. cvičenie

- ▶ Začína v stredu o 09:50 v miestnosti F1-248.
- ▶ Pracujte samostatne.
- ▶ Úlohy odovzdať najneskôr do 12:00 v pondelok budúci týždeň.

6. prednáška

- ▶ Vnorená jednoduchá rekurzia:

$$f(0, y) = g(y)$$

$$f(x + 1, y) = h\left(x, f(x, s_1(x, y)), f(x, s_2(x, y, f(x, s_1(x, y)))), y\right).$$