

1-INF-450 Logika pre informatikov

Zimný semester 2013/14

13. prednáška

Ján Komara

Obsah 12. prednášky

Zopakovanie

Čiastočne μ -rekurzívne funkcie

Church-Turingova téza

Nerozhodnuteľné problémy

Polorozhodnuteľné problémy

Turingova úplnosť a totálne funkcionálne programovanie

Záver

Zopakovanie

Cieľ predmetu

- ▶ Vybudovať matematické základy deklaratívnych programovacích jazykov.

Stručná osnova predmetu

- ▶ Primitívne rekurzívne funkcie
 - ▶ Aritmetizácia dátových štruktúr.
 - ▶ Regulárne rekurzívne definície s mierou.
- ▶ Obecné rekurzívne funkcie
 - ▶ Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií:
 - ▶ Ackermannova funkcia (1928),
 - ▶ univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie.
- ▶ Čiastočne rekurzívne funkcie
 - ▶ Kleeneho prvá veta o rekurzii (veta o pevnom bode).
 - ▶ Kleeneho veta o normálnej forme.
 - ▶ Churchova téza a algoritmicky nerozhodnuteľné problémy.

Zopakovanie

Čiastočne rekurzívne funkcie

- ▶ Základné funkcie:
 - ▶ funkcia nasledovníka $S(x) = x + 1$,
 - ▶ funkcia predchodcu $x \div 1$.
- ▶ Explicitné definície čiastočných funkcií:

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq \tau[x_1, \dots, x_n].$$

- ▶ Rekurzívne definície čiastočných funkcií:

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \dots, x_n].$$

Funkcia je rekurzívna, ak je to totálna čiastočne rekurzívna funkcia.
Predikát je rekurzívny, ak taká je jeho charakteristická funkcia.

Zopakovanie

Veta

Trieda rekurzívnych funkcií je obecne rekurzívne uzavretá.

Dôsledok

- ▶ *Každá obecne rekurzívna funkcia je rekurzívna.*
- ▶ *Každý obecne rekurzívny predikát je rekurzívny.*
- ▶ *Trieda rekurzívnych funkcií je primitívne rekurzívne uzavretá.*
- ▶ *Rekurzívne predikáty sú uzavreté na explicitné definície predikátov s ohraničenými formulami.*
- ▶ *Rekurzívne funkcie sú uzavreté na definície funkcií ohraničenou minimalizáciou.*
- ▶ *Rekurzívne funkcie sú uzavreté na definície funkcií regulárnou minimalizáciou.*

Zopakovanie

Neohraničená minimalizácia

Sú to definície čiastočných funkcií v tvare

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq \text{najmenšie číslo } y \text{ také, že platí } \varphi[x_1, \dots, x_n, y],$$

kde φ je ohraničená formula. Skrátený zápis:

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq \mu y [\varphi[x_1, \dots, x_n, y]].$$

Regulárna minimalizácia:

$$f(\vec{x}) = \mu y [\varphi[\vec{x}, y]] \quad \text{ak } \forall \vec{x} \exists y \varphi[\vec{x}, y],$$

je špeciálny prípad neohraničenej minimalizácie.

Veta

Trieda čiastočných rekurzívnych funkcií je uzavretá na definície čiastočných funkcií neohraničenou minimalizáciou.

Zopakovanie

Neohraničená minimalizácia

Sú to definície čiastočných funkcií v tvare

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq y \leftrightarrow \varphi[x_1, \dots, x_n, y] \wedge \forall z < y \neg \varphi[x_1, \dots, x_n, z],$$

kde φ je ohraničená formula. Skrátený zápis:

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq \mu y [\varphi[x_1, \dots, x_n, y]].$$

Regulárna minimalizácia:

$$f(\vec{x}) = \mu y [\varphi[\vec{x}, y]] \quad \text{ak } \forall \vec{x} \exists y \varphi[\vec{x}, y],$$

je špeciálny prípad neohraničenej minimalizácie.

Veta

Trieda čiastočných rekurzívnych funkcií je uzavretá na definície čiastočných funkcií neohraničenou minimalizáciou.

Zopakovanie

Veta o normálnej forme (Kleene)

Existuje unárna primitívne rekurzívna funkcia U a pre každé $n \geq 1$ existuje $(n+2)$ -árny primitívne rekurzívny predikát T_n taký, že pre každú n -árnu čiastočne rekurzívnu funkciu f existuje číslo e také, že pre všetky čísla $x_1, \dots, x_n$ platí vzťah

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq U \mu s [T_n(e, x_1, \dots, x_n, s)].$$

Idea dôkazu

Neformálny popis predikátu Kleeneho predikátu T_n a funkcie U :

- ▶ $T_n(e, x_1, \dots, x_n, s)$ platí práve vtedy, keď číslo e je kód nejakého programu a číslo s je kód výpočtu tohoto programu pre vstupy $x_1, \dots, x_n$.
- ▶ Funkcia $U(s)$ určí z kódu výpočtu výslednú hodnotu.

Zopakovanie

Veta

Každá rekurzívna funkcia je obecné rekurzívna.

Rekurzívne indexy (príklad)

Rekurzívna definícia operácie sčítania so silnou rovnosťou

$$x_1 + x_2 \simeq D(x_1, S(P(x_1) + x_2), x_2).$$

Rekurzívny funkčný symbol

$$\lambda_2. D(x_1, S f_2(P(x_1), x_2), x_2)$$

a jeho aritmetizácia (rekurzívny index operácie sčítania)

$$\lambda_2. D(x_1, S(f_2[0] \bullet P(x_1) \bullet x_2), x_2).$$

Zopakovanie

Rekurzívne indexy

Symbolom $\varphi_e^{(n)}$ označujeme n -árnu čiastočne rekurzívnu funkciu definovanú predpisom

$$\varphi_e^{(n)} = \begin{cases} \lambda_{n.\tau} & \text{ak } e = \ulcorner \lambda_{n.\tau} \urcorner \text{ pre nejaké } \lambda_{n.\tau}, \\ \emptyset^{(n)} & \text{ináč.} \end{cases}$$

Ak $f = \varphi_e^{(n)}$ tak číslo e nazveme rekurzívnym indexom čiastočnej funkcie f .

Enumeračná čiastočná funkcia

Symbolom Ψ_n si označíme $(n+1)$ -árnu čiastočnú funkciu:

$$\Psi_n(e, x_1, \dots, x_n) \simeq \varphi_e^{(n)}(x_1, \dots, x_n).$$

Z dôkazu Kleeneho vety o normálnej forme vyplýva, že

$$\Psi_n(e, x_1, \dots, x_n) \simeq \bigcup \mu s [T_n(e, x_1, \dots, x_n, s)].$$

Zopakovanie

Veta o enumerácií (Kleene)

Pre každé $n \geq 1$, čiastočná funkcia Ψ_n je čiastočne rekurzívna funkcia, ktorá enumeruje (s opakovaním) triedu n -árnych čiastočne rekurzívnych funkcií, t. j. postupnosť

$$\lambda x_1 \dots x_n . \Psi_n(e, x_1, \dots, x_n) \quad \text{pre } e = 0, 1, 2, \dots$$

je enumerácia triedy n -árnych čiastočne rekurzívnych funkcií.

Veta

Zúplnenie enumeračnej čiastočnej funkcie nie je rekurzívna funkcia.

Veta

Graf enumeračnej čiastočnej funkcie nie je rekurzívny predikát.

Čiastočne μ -rekurzívne funkcie

Primitívna rekurgia čiastočných funkcií

Sú to definície čiastočných funkcií v tvare

$$\begin{aligned}f(0, y_1, \dots, y_n) &\simeq g(y_1, \dots, y_n) \\ f(x + 1, y_1, \dots, y_n) &\simeq h(x, f(x, y_1, \dots, y_n), y_1, \dots, y_n).\end{aligned}$$

Primitívna rekurgia pre totálne g, h :

$$\begin{aligned}f(0, y_1, \dots, y_n) &= g(y_1, \dots, y_n) \\ f(x + 1, y_1, \dots, y_n) &= h(x, f(x, y_1, \dots, y_n), y_1, \dots, y_n)\end{aligned}$$

je špeciálny prípad operátora primitívnej rekurgie čiastočných funkcií.

Čiastočne μ -rekurzívne funkcie

Veta

Trieda čiastočne rekurzívnych funkcií je uzavretá na primitívnu rekurziu čiastočných funkcií.

Dôkaz.

Nech g, h sú čiastočne rekurzívne funkcie a

$$\begin{aligned}f(0, y_1, \dots, y_n) &\simeq g(y_1, \dots, y_n) \\f(x + 1, y_1, \dots, y_n) &\simeq h(x, f(x, y_1, \dots, y_n), y_1, \dots, y_n).\end{aligned}$$

Rekurzivnosť čiastočnej funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned}f(x, y_1, \dots, y_n) &\simeq \text{if } x \neq 0 \text{ then} \\&\quad h(x \div 1, f(x \div 1, y_1, \dots, y_n), y_1, \dots, y_n) \\&\text{else} \\&\quad g(y_1, \dots, y_n).\end{aligned}$$

Čiastočne μ -rekurzívne funkcie

Minimalizácia čiastočných funkcií

Sú to definície čiastočných funkcií v tvare

$$f(\vec{x}) \simeq y \leftrightarrow g(y, \vec{x}) \simeq 1 \wedge \forall z < y (g(z, \vec{x}) \downarrow \wedge g(z, \vec{x}) \neq 1).$$

Skrátený zápis

$$f(\vec{x}) \simeq \mu y [g(y, \vec{x}) \simeq 1].$$

Neohraničená minimalizácia pre totálne g :

$$f(\vec{x}) \simeq \mu y [g(y, \vec{x}) = 1].$$

je špeciálny prípad operátora minimalizácie čiastočných funkcií.

Čiastočne μ -rekurzívne funkcie

Minimalizácia čiastočných funkcií

Sú to definície čiastočných funkcií v tvare

$$f(\vec{x}) \simeq y \leftrightarrow g(y, \vec{x}) \simeq 1 \wedge \forall z < y \exists v (g(z, \vec{x}) \simeq v \wedge v \neq 1).$$

Skrátený zápis

$$f(\vec{x}) \simeq \mu y [g(y, \vec{x}) \simeq 1].$$

Neohraničená minimalizácia pre totálne g :

$$f(\vec{x}) \simeq \mu y [g(y, \vec{x}) = 1].$$

je špeciálny prípad operátora minimalizácie čiastočných funkcií.

Čiastočne μ -rekurzívne funkcie

Veta

Trieda čiastočne rekurzívnych funkcií je uzavretá na minimalizáciu čiastočných funkcií.

Dôkaz.

Nech g je čiastočne rekurzívna funkcia a

$$f(\vec{x}) \simeq \mu y [g(y, \vec{x}) \simeq 1].$$

Rekurzívnosť čiastočnej funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned} h(y, \vec{x}) &\simeq \text{if } (g(y, \vec{x}) =_* 1) \neq 0 \text{ then } y \text{ else } h(y + 1, \vec{x}) \\ f(\vec{x}) &\simeq h(0, \vec{x}). \end{aligned}$$

Korektnosť implementácie plynie z tejto vlastnosti č. r. funkcie h :

$$\begin{aligned} h(y, \vec{x}) \simeq z &\leftrightarrow y \leq z \wedge g(z, \vec{x}) \simeq 1 \wedge \\ &\forall z_1 (y \leq z_1 < z \rightarrow g(z_1, \vec{x}) \downarrow \wedge g(z_1, \vec{x}) \not\simeq 1). \end{aligned}$$

Čiastočne μ -rekurzívne funkcie

Definícia triedy čiastočne μ -rekurzívnych funkcií

► Základné funkcie:

- konštantná funkcia $Z(x) = 0$,
- funkcia nasledovníka $S(x) = x + 1$,
- identity (projekcie) $I_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$ pre každé $1 \leq i \leq n$.

► Kompozícia (skladanie) čiastočných funkcií:

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq h(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)).$$

► Primitívna rekurgia čiastočných funkcií:

$$\begin{aligned} f(0, y_1, \dots, y_n) &\simeq g(y_1, \dots, y_n) \\ f(S(x), y_1, \dots, y_n) &\simeq h(x, f(x, y_1, \dots, y_n), y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

► Minimalizácia čiastočných funkcií:

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq \mu y [g(y, x_1, \dots, x_n) \simeq 1].$$

Čiastočne μ -rekurzívne funkcie

Definícia

Predikát je μ -rekurzívny, ak taká je jeho charakteristická funkcia.

Veta

Trieda μ -rekurzívnych funkcií je primitívne rekurzívne uzavretá.

Dôsledok

- ▶ *Každá primitívne rekurzívna funkcia je μ -rekurzívna.*
- ▶ *Každý primitívne rekurzívny predikát je μ -rekurzívny.*

Čiastočne μ -rekurzívne funkcie

Veta

Trieda čiastočne rekurzívnych funkcií je totožná s triedou čiastočne μ -rekurzívnych funkcií.

Dôkaz.

Ak f je n -árna čiastočne rekurzívna funkcia, potom existuje číslo e také, že pre všetky čísla $x_1, \dots, x_n$ platí vzťah:

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq U \mu s [T_n(e, x_1, \dots, x_n, s)].$$

μ -rekurzívnosť čiastočnej funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned} P(s, x_1, \dots, x_n) &\leftrightarrow T_n(e, x_1, \dots, x_n, s) \\ g(x_1, \dots, x_n) &\simeq \mu s [P_*(s, x_1, \dots, x_n) \simeq 1] \\ f(x_1, \dots, x_n) &\simeq U g(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Opačná inklúzia plynie z faktu, že trieda čiastočne rekurzívnych funkcií je μ -rekurzívne uzavretá.

Church-Turingova téza

Churchova téza (1936)

Trieda intuitívne vypočítateľných funkcií nad oborom prirodzených čísel je totožná s triedou obecné rekurzívnych funkcií.

Turingova téza (1936-7)

Trieda intuitívne vypočítateľných funkcií nad oborom prirodzených čísel je totožná s triedou funkcií vypočítateľných na Turingových strojoch.

Modely (čiastočne) vypočítateľných funkcií

- ▶ obecné rekurzívne funkcie [Herbrand-Gödel, 1931, 1934],
- ▶ λ -definovateľné funkcie [Church, 1932],
- ▶ (čiastočne) μ -rekurzívne funkcie [Kleene, 1935, 1952],
- ▶ Turingove stroje [Turing, 1936-7],
- ▶ čiastočne rekurzívne funkcie [Kleene, 1952],
- ▶ registrové stroje [napr. Minsky, 1961].

Nerozhodnuteľné problémy

Problém zastavenia

Aritmetizácia problému zastavenia pre n -árne čiastočne rekurzívne funkcie je $(n+1)$ -árny predikát definovaný predpisom

$$W_e^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi_e^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \downarrow.$$

Veta

Problém zastavenia pre n -árne čiastočne rekurzívne funkcie je nerozhodnuteľný problém.

Dôkaz.

V opačnom prípade by takéto zúplnenie enumeračnej čiastočnej funkcie Ψ_n bola rekurzívna funkcia:

$$f(e, x_1, \dots, x_n) \simeq \begin{cases} \varphi_e^{(n)}(x_1, \dots, x_n) & \text{ak } \varphi_e^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \downarrow, \\ 0 & \text{ak } \varphi_e^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \uparrow. \end{cases}$$

Nerozhodnuteľné problémy

Problém zastavenia

Aritmetizácia problému zastavenia pre n -árne čiastočne rekurzívne funkcie je $(n+1)$ -árny predikát definovaný predpisom

$$W_e^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi_e^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \downarrow.$$

Veta

Problém zastavenia pre n -árne čiastočne rekurzívne funkcie je nerozhodnuteľný problém.

Dôkaz.

V opačnom prípade by takéto zúplnenie enumeračnej čiastočnej funkcie Ψ_n bola rekurzívna funkcia:

$$f(e, x_1, \dots, x_n) \simeq \text{if } W_e^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \text{ then } \Psi_n(e, x_1, \dots, x_n) \text{ else } 0.$$

Nerozhodnuteľné problémy

Veta

Problém zastavenia pre enumeračnú čiastočnú funkciu je nerozhodnuteľný problém.

Dôkaz.

Nech e_n je rekurzívny index enumeračnej čiastočnej funkcie Ψ_n :

$$\Psi_n(e, x_1, \dots, x_n) \simeq \Psi_{n+1}(e_n, e, x_1, \dots, x_n).$$

Čiže

$$\varphi_e^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \downarrow \leftrightarrow \varphi_{e_n}^{(n+1)}(e, x_1, \dots, x_n) \downarrow.$$

Odtiaľ dostaneme

$$W_e^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow W_{e_n}^{(n+1)}(e, x_1, \dots, x_n).$$

Z rozhodnuteľnosti problému zastavenia pre Ψ_n by sme dostali rozhodnuteľnosť všeobecného problému zastavenia.

Polorozhodnuteľné problémy

Čiastočne rekurzívne predikáty

n -árny predikát P je čiastočne rekurzívny, ak existuje n -árna čiastočne rekurzívna funkcia f taká, že

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n) \downarrow.$$

Príklady

- Každý n -árny rekurzívny predikát P je čiastočne rekurzívny:

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq \text{if } P(x_1, \dots, x_n) \text{ then } 1 \text{ else } \emptyset^{(n)}(x_1, \dots, x_n).$$

- Aritmetizácia problému zastavenia pre n -árne čiastočne rekurzívne funkcie je $(n+1)$ -árny čiastočne rekurzívny predikát:

$$W_e^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \Psi_n(e, x_1, \dots, x_n) \downarrow.$$

Polorozhodnuteľné problémy

Čiastočne rekurzívne predikáty

n -árny predikát P je čiastočne rekurzívny, ak existuje n -árna čiastočne rekurzívna funkcia f taká, že

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n) \downarrow.$$

Príklady

- Každý n -árny rekurzívny predikát P je čiastočne rekurzívny:

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq \mu y [P(x_1, \dots, x_n)].$$

- Aritmetizácia problému zastavenia pre n -árne čiastočne rekurzívne funkcie je $(n+1)$ -árny čiastočne rekurzívny predikát:

$$W_e^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \Psi_n(e, x_1, \dots, x_n) \downarrow.$$

Polorozhodnuteľné problémy

Veta o normálnej forme (Kleene)

Pre každý n -árny čiastočne rekurzívny predikát P existuje číslo e také, že pre všetky čísla $x_1, \dots, x_n$ platí vzťah

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists s \, T_n(e, x_1, \dots, x_n, s)$$

Dôkaz.

Nech f je n -árna čiastočne rekurzívna funkcia taká, že

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n) \downarrow.$$

Z Kleeneho vety o normálnej forme pre n -árne čiastočne rekurzívne funkcie plynie, že existuje číslo e také, že

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq \bigcup \mu s [T_n(e, x_1, \dots, x_n, s)].$$

Polorozhodnuteľné problémy

Veta o normálnej forme (Kleene)

Pre každý n -árny čiastočne rekurzívny predikát P existuje číslo e také, že pre všetky čísla $x_1, \dots, x_n$ platí vzťah

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists s T_n(e, x_1, \dots, x_n, s)$$

Dôkaz.

Nech f je n -árna čiastočne rekurzívna funkcia taká, že

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n) \downarrow.$$

Z Kleeneho vety o normálnej forme pre n -árne čiastočne rekurzívne funkcie plynie, že existuje číslo e také, že

$$f(x_1, \dots, x_n) \downarrow \leftrightarrow \exists s T_n(e, x_1, \dots, x_n, s).$$

Polorozhodnuteľné problémy

Veta (Post)

Predikát je rekurzívny práve vtedy, keď on a jeho negácia sú čiastočne rekurzívne predikáty.

Dôkaz.

Nech n -árny predikát P a jeho negácia sú čiastočne rekurzívne. Z vety o normálnej forme plynie, že existujú čísla e_1, e_2 také, že

$$\begin{aligned}P(x_1, \dots, x_n) &\leftrightarrow \exists s T_n(e_1, x_1, \dots, x_n, s) \\ \neg P(x_1, \dots, x_n) &\leftrightarrow \exists s T_n(e_2, x_1, \dots, x_n, s).\end{aligned}$$

Regulárna minimalizácia definuje n -árnu rekurzívnu funkciu f :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \mu s [T_n(e_1, x_1, \dots, x_n, s) \vee T_n(e_2, x_1, \dots, x_n, s)].$$

Rekurzivnosť predikátu P plynie z tohoto vyjadrenia

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow T_n(e_1, x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)).$$

Polorozhodnuteľné problémy

Projekcie rekurzívnych predikátov

Nech R je $(n+1)$ -árny rekurzívny predikát a nech P je n -árny predikát definovaný predpisom

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists y R(y, x_1, \dots, x_n).$$

Vravíme, že predikát P vznikol (existenčnou) projekciou rekurzívneho predikátu R .

Rekurzívne spočítateľné predikáty

n -árny predikát P je rekurzívne spočítateľný, ak jeho obor pravdivosti je prázdna množina alebo ak existuje unárna rekurzívna funkcia f taká, že

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists y f(y) = \langle x_1, \dots, x_n \rangle.$$

Vravíme, že funkcia f enumeruje predikát P .

Polorozhodnuteľné problémy

Veta

Nech P je n -árny predikát. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- ▶ *P je čiastočne rekurzívny predikát.*
- ▶ *P je projekcia rekurzívneho predikátu.*
- ▶ *P je rekurzívne spočítateľný predikát.*

Dôkaz.

Znenie vety plynie z nasledujúcich troch pomocných tvrdení.

Polorozhodnuteľné problémy

Lema

Každý čiastočne rekurzívny predikát je projekciou rekurzívneho predikátu.

Dôkaz.

Nech P je n -árny čiastočne rekurzívny predikát. Z Kleeneho vety o normálnej forme plynie, že existuje číslo e také, že

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists s T_n(e, x_1, \dots, x_n, s).$$

Nasledujúci vzťah definuje $(n+1)$ -árny rekurzívny predikát R :

$$R(s, x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow T_n(e, x_1, \dots, x_n, s).$$

Predikát P je tak projekciou rekurzívneho predikátu

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists s R(s, x_1, \dots, x_n).$$

Polorozhodnuteľné problémy

Lema

Každá projekcia rekurzívneho predikátu je rekurzívne spočítateľný predikát.

Dôkaz.

Nech R je $(n+1)$ -árny rekurzívny predikát a nech P je jeho projekcia:

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists y R(y, x_1, \dots, x_n)$$

Predpokladajme, že predikát P platí pre čísla $a_1, \dots, a_n$. Uvažujme unárnu funkciu f definovanú vzťahom

$$f(z) = \begin{cases} \langle x_1, \dots, x_n \rangle & \text{ak pre nejaké čísla } y, x_1, \dots, x_n \text{ platí} \\ & z = \langle y, x_1, \dots, x_n \rangle \text{ a } R(y, x_1, \dots, x_n), \\ \langle a_1, \dots, a_n \rangle & \text{ináč.} \end{cases}$$

f je rekurzívna funkcia, ktorá enumeruje predikát P :

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists z f(z) = \langle x_1, \dots, x_n \rangle.$$

P je preto rekurzívne spočítateľný predikát.

Polorozhodnuteľné problémy

Lema

Každá projekcia rekurzívneho predikátu je rekurzívne spočítateľný predikát.

Dôkaz.

Nech R je $(n+1)$ -árny rekurzívny predikát a nech P je jeho projekcia:

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists y R(y, x_1, \dots, x_n)$$

Predpokladajme, že predikát P platí pre čísla $a_1, \dots, a_n$. Uvažujme unárnu funkciu f definovanú vzťahom

$$\begin{aligned} \langle R \rangle(z) &\leftrightarrow R([z]_1^{n+1}, [z]_2^{n+1}, \dots, [z]_{n+1}^{n+1}) \\ f(z) &= \text{if } \text{Tuple}(n+1, z) \wedge \langle R \rangle(z) \text{ then } \pi_2(z) \text{ else } \langle a_1, \dots, a_n \rangle. \end{aligned}$$

f je rekurzívna funkcia, ktorá enumeruje predikát P :

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists z f(z) = \langle x_1, \dots, x_n \rangle.$$

P je preto rekurzívne spočítateľný predikát.

Polorozhodnuteľné problémy

Lema

Každý rekurzívne spočítateľný predikát je čiastočne rekurzívny predikát.

Dôkaz.

Nech f je unárna rekurzívna funkcia, ktorá enumeruje n -árny predikát P :

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists y f(y) = \langle x_1, \dots, x_n \rangle.$$

Potom neohraničená minimalizácia

$$g(x_1, \dots, x_n) \simeq \mu y [f(y) = \langle x_1, \dots, x_n \rangle]$$

definuje čiastočne rekurzívnu funkcia g takú, že

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow g(x_1, \dots, x_n) \downarrow.$$

Turingova úplnosť a totálne funkcionálne programovanie

Uniformný problém zastavenia

Aritmetizácia uniformného problému zastavenia pre n -árne čiastočne rekurzívne funkcie je unárny predikát definovaný predpisom

$$\text{Tot}_n(e) \leftrightarrow \forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi_e^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \downarrow.$$

Veta

Uniformný problém zastavenia pre n -árne čiastočne rekurzívne funkcie nie je ani polorozhodnuteľný problém.

Turingova úplnosť a totálne funkcionálne programovanie

Uniformný problém zastavenia

Aritmetizácia uniformného problému zastavenia pre n -árne čiastočne rekurzívne funkcie je unárny predikát definovaný predpisom

$$\text{Tot}_n(e) \leftrightarrow \forall x_1 \cdots \forall x_n W_e^{(n)}(x_1, \dots, x_n).$$

Veta

Uniformný problém zastavenia pre n -árne čiastočne rekurzívne funkcie nie je ani polorozhodnuteľný problém.

Turingova úplnosť a totálne funkcionálne programovanie

Dôkaz pre $n = 1$.

Sporom. Predpokladajme, že predikát Tot je čiastočne rekurzívny. Potom existuje unárna rekurzívna funkcia k , ktorá ho enumeruje:

$$\text{Tot}(e) \leftrightarrow \exists x \, k(x) = e.$$

Nasledujúci vzťah definuje unárnu čiastočne rekurzívnu funkciu f :

$$f(x) \simeq \Psi(k(x), x) + 1 \quad (\simeq \varphi_{k(x)}(x) + 1). \quad (1)$$

Pretože $\varphi_{k(x)}(x) \downarrow$, f je totálna. Existujú preto čísla e_0, x_0 také, že

$$\forall x \, \Psi(e_0, x) \simeq f(x) \quad (2)$$

$$e_0 = k(x_0). \quad (3)$$

Postupnými úpravami odvodíme spor:

$$f(x_0) \stackrel{(1)}{\simeq} \Psi(k(x_0), x_0) + 1 \stackrel{(3)}{\simeq} \Psi(e_0, x_0) + 1 \stackrel{(2)}{\simeq} f(x_0) + 1.$$

Turing completeness and total functional programming

Interpreter for a programming language $\mathcal{L}$

Let M describe a single computation step of $\mathcal{L}$ and P its final configuration. Interpreter for $\mathcal{L}$ is the unlimited iteration of M s.t.

$$M^*(x) = \begin{cases} M^k(x) & \text{if } P M^k(x) \text{ and } k \text{ is the least such number,} \\ 0 & \text{if there is no such number.} \end{cases}$$

Program for evaluating of the interpreter M^* :

$$\exists k PM^k(x) \rightarrow M^*(x) = \text{if } P(x) \text{ then } x \text{ else } M^* M(x).$$

Condition of regularity of the program:

$$\exists k PM^k(x) \wedge \neg P(x) \rightarrow t M(x) < t(x) \wedge \exists k PM^k M(x),$$

where $t(x) = \mu k [\exists l PM^l(x) \rightarrow PM^k(x)]$ is the number of computation steps from the configuration x .

Turing completeness and total functional programming

Interpreter for a programming language $\mathcal{L}$

Let M describe a single computation step of $\mathcal{L}$ and P its final configuration. Interpreter for $\mathcal{L}$ is the unlimited iteration of M s.t.

$$M^*(x) = y \leftrightarrow \exists k (Pf^k(x) \wedge \forall l < k \neg PM^l(x) \wedge y = M^k(x)) \vee \neg \exists k PM^k(x) \wedge y = 0.$$

Program for evaluating of the interpreter M^* :

$$\exists k PM^k(x) \rightarrow M^*(x) = \text{if } P(x) \text{ then } x \text{ else } M^* M(x).$$

Condition of regularity of the program:

$$\exists k PM^k(x) \wedge \neg P(x) \rightarrow t M(x) < t(x) \wedge \exists k PM^k M(x),$$

where $t(x) = \mu k [\exists l PM^l(x) \rightarrow PM^k(x)]$ is the number of computation steps from the configuration x .

Záver

12. cvičenie

- ▶ Výsledky s komentárom nájdete na webe.

13. cvičenie

- ▶ Začína v stredu o 09:50 v miestnosti F1-248.

Skúšobné obdobie

- ▶ Na riadne termíny sa zapisujete cez AIS2. Požiadavka: priebežné semestrálne hodnotenie aspoň 20 bodov (podľa AIS2).
- ▶ Ďalšie informácie sú na webovej stránke predmetu:
 - ▶ konzultácie počas skúšobného obdobia,
 - ▶ súbor obsahujúci otázky na skúšku.