

1-INF-450 Logika pre informatikov

Zimný semester 2013/14

10. prednáška

Ján Komara

Obsah 10. prednášky

Zopakovanie

Čiastočné funkcie

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Rekurzívne definície

Výpočtový model

Záver

Zopakovanie

Cieľ predmetu

- ▶ Vybudovať matematické základy deklaratívnych programovacích jazykov.

Stručná osnova predmetu

- ▶ Primitívne rekurzívne funkcie
 - ▶ Aritmetizácia dátových štruktúr.
 - ▶ Regulárne rekurzívne definície s mierou.
- ▶ Obecne rekurzívne funkcie
 - ▶ Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií:
 - ▶ Ackermannova funkcia (1928),
 - ▶ univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie.
- ▶ Čiastočne rekurzívne funkcie
 - ▶ Kleeneho prvá veta o rekurzii (veta o pevnom bode).
 - ▶ Kleeneho veta o normálnej forme.
 - ▶ Churchova téza a algoritmicky nerozhodnuteľné problémy.

Zopakovanie

Dobre založené relácie

Vravíme, že relácia $\vec{x} \prec \vec{y}$ na $\mathbb{N}^n$ je dobre založená (tiež noetherianská), ak každá klesajúca postupnosť

$$\vec{x}_1 \succ \vec{x}_2 \succ \vec{x}_3 \succ \vec{x}_4 \succ \dots$$

je konečná. Tu $\vec{x} \succ \vec{y} \leftrightarrow \vec{y} \prec \vec{x}$.

Úplné dobre založené usporiadanie sa nazýva dobré usporiadanie.

Príklady

- Relácia $\vec{x} \prec \vec{y}$ indukovaná mierou $\mu[\vec{x}]$ do štandardného usporiadania prirodzených čísel:

$$\vec{x} \prec \vec{y} \leftrightarrow \mu[\vec{x}] < \mu[\vec{y}].$$

- Lexikografické usporiadanie dvojíc prirodzených čísel:

$$(a, b) <_{\text{lex}} (c, d) \leftrightarrow a < c \vee a = c \wedge b < d.$$

Zopakovanie

Regulárna rekurzia do dobre založenej relácie $\prec$

Sú to definície v tvare

$$f(\vec{x}) = \tau[f; \vec{x}], \quad (1)$$

pre ktoré sú splnené podmienky regularity.

Podmienky regularity majú tvar:

$$\Gamma_{f(\vec{\rho})}^{\tau}[f; \vec{x}] \rightarrow \vec{\rho}[f; \vec{x}] \prec \vec{x}$$

pre každú rekurzívnu aplikáciu $f(\vec{\rho})$ funkcie f , ktorá je strážená podmienkou $\Gamma_{f(\vec{\rho})}^{\tau}$ v terme τ .

Splnenie podmienok pre funkciu definovanou pridruženou rovnosťou

$$f(\vec{x}) = \tau[[f]_{\vec{x}}^{\prec}; \vec{x}].$$

Táto funkcia je potom jediným riešením funkcionálnej rovnice (1).

Zopakovanie

Primitívne rekurzívne funkcie (charakterizácia)

Trieda primitívne rekurzívnych funkcií je najmenšia trieda funkcií, ktorá obsahuje funkciu nasledovníka $S(x) = x + 1$, funkciu predchodcu $x \div 1$ a je uzavretá na explicitné definície a regulárne rekurzívne definície s mierou.

Obecne rekurzívne funkcie (definícia)

Trieda obecné rekurzívnych funkcií je najmenšia trieda funkcií, ktorá obsahuje funkciu nasledovníka $S(x) = x + 1$, funkciu predchodcu $x \div 1$ a je uzavretá na explicitné definície a regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií.

Obecne rekurzívne funkcie, ktoré nie sú primitívne rekurzívne

- ▶ Ackermannova funkcia (1928).
- ▶ Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie.

Zopakovanie

Základné konštrukcie pri tvorbe deklaratívnych programov

- Premenné, konštanty a funkčné aplikácie.
- Podmienkové výrazy:

case

$$\varphi_1[\vec{x}; \vec{y}_1] \Rightarrow \rho_1[\vec{x}, \vec{y}_1]$$

$\vdots$

$$\varphi_m[\vec{x}; \vec{y}_m] \Rightarrow \rho_m[\vec{x}, \vec{y}_m]$$

end

case

$$\chi_1[\vec{x}] = 1 \wedge \vec{\omega}_1[\vec{x}] = \vec{y}_1 \Rightarrow \rho_1[\vec{x}, \vec{y}_1]$$

$\vdots$

$$\chi_m[\vec{x}] = 1 \wedge \vec{\omega}_m[\vec{x}] = \vec{y}_m \Rightarrow \rho_m[\vec{x}, \vec{y}_m]$$

end.

$\chi_i[\vec{x}]$ je charakt. term pre porovnávanie so vzorom $\varphi_i[\vec{x}; \vec{y}_i]$:

$$\chi_i[\vec{x}] = 1 \vee \chi_i[\vec{x}] = 0 \quad \exists \vec{y}_i \varphi_i[\vec{x}; \vec{y}_i] \leftrightarrow \chi_i[\vec{x}] = 1.$$

Sémantika:

$$D\left(\chi_1[\vec{x}], \rho_1[\vec{x}, \vec{\omega}_1[\vec{x}]], \dots, D(\chi_m[\vec{x}], \rho_m[\vec{x}, \vec{\omega}_m[\vec{x}]], 0) \dots\right).$$

Zopakovanie

Základné konštrukcie pri tvorbe deklaratívnych programov

- Premenné, konštanty a funkčné aplikácie.
- Podmienkové výrazy:

case

$$\varphi_1[\vec{x}; \vec{y}_1] \Rightarrow \rho_1[\vec{x}, \vec{y}_1]$$

$\vdots$

$$\varphi_m[\vec{x}; \vec{y}_m] \Rightarrow \rho_m[\vec{x}; \vec{y}_m]$$

end

case

$$\chi_1[\vec{x}] = 1 \wedge \vec{\omega}_1[\vec{x}] = \vec{y}_1 \Rightarrow \rho_1[\vec{x}, \vec{y}_1]$$

$\vdots$

$$\chi_m[\vec{x}] = 1 \wedge \vec{\omega}_m[\vec{x}] = \vec{y}_m \Rightarrow \rho_m[\vec{x}, \vec{y}_m]$$

end.

Podmienka úplnosti a jednoznačnosti:

$$\bigvee_{i=1}^m \exists \vec{y}_i \varphi_i[\vec{x}; \vec{y}_i] \wedge \bigwedge_{i,j=1}^m \forall \vec{y}_i \forall \vec{y}_j (\varphi_i[\vec{x}; \vec{y}_i] \wedge \varphi_j[\vec{x}; \vec{y}_j] \rightarrow \rho_i[\vec{x}, \vec{y}_i] = \rho_j[\vec{x}, \vec{y}_j]).$$

Matematická notácia:

$$\mathcal{D}_{\chi_1, \dots, \chi_m}^{\vec{\omega}_1, \dots, \vec{\omega}_m}(\varphi_1[\vec{x}; \vec{y}_1], \rho_1[\vec{x}, \vec{y}_1], \dots, \varphi_m[\vec{x}; \vec{y}_m], \rho_m[\vec{x}, \vec{y}_m]).$$

Čiastočné funkcie

Čiastočné funkcie

n -árna čiastočná funkcia f je jednoznačná relácia z N^n do N :

$$(\vec{x}, y) \in f \wedge (\vec{x}, z) \in f \rightarrow y = z.$$

Definičný obor čiastočnej funkcie f :

$$\text{dom } f = \{\vec{x} \in N^n \mid \exists y (\vec{x}, y) \in f\}.$$

Čiastočná funkcia f je totálna, ak $\text{dom } f = N^n$, t.j.

$$\forall \vec{x} \exists y (\vec{x}, y) \in f.$$

Pre každé $n \geq 1$, symbolom $\emptyset^{(n)}$ označujeme n -árnu čiastočnú funkciu, ktorá nie je nikde definovaná.

Čiastočné funkcie

Usporiadanie čiastočných funkcií

Trieda n -árnych čiastočných funkcií je usporiadaná reláciou inklúzie:

$$f \subseteq g \leftrightarrow \forall \vec{x} \forall y ((\vec{x}, y) \in f \rightarrow (\vec{x}, y) \in g).$$

Základné pojmy:

- ▶ f je rozšírením g , ak $g \subseteq f$.
- ▶ f je zúžením g , ak $f \subseteq g$.
- ▶ Rozšírenie f , ktoré je totálne, nazveme zúplnením čiastočnej funkcie f .

Niektoré základné vzťahy:

- ▶ $\emptyset^{(n)} \subseteq f$ pre každú čiastočnú n -árnu funkciu f .
- ▶ Ak $f \subseteq g$ a f je totálna, potom $f = g$.

Čiastočné funkcie

Reťazec

Nekonečná postupnosť n -árnych čiastočných funkcií

$$f_0, f_1, f_2, \dots, f_i, f_{i+1}, \dots$$

je reťazec, ak platí

$$f_0 \subseteq f_1 \subseteq f_2 \subseteq \dots \subseteq f_i \subseteq f_{i+1} \subseteq \dots .$$

Množinové zjednotenie $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$:

$$(\vec{x}, y) \in \bigcup_{i=0}^{\infty} f_i \leftrightarrow \exists i (\vec{x}, y) \in f_i,$$

je jeho limita (supremum). Je to opäť n -árna čiastočná funkcia.

Čiastočné funkcie

Čiastočná denotácia termov

Tvrdenie $\tau \simeq y$, ktoré čítame takto

hodnota výrazu τ existuje a je rovná číslu y ,

je definované indukzívne na štruktúru termu τ :

$$x \simeq y \equiv x = y$$

$$f(\rho_1, \dots, \rho_n) \simeq y \equiv \exists z_1 \cdots \exists z_n \left(\bigwedge_{i=1}^n \rho_i \simeq z_i \wedge (z_1, \dots, z_n, y) \in f \right)$$

$$D(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \simeq y \equiv \exists z_1 \left(\rho_1 \simeq z_1 \wedge (z_1 \neq 0 \wedge \rho_2 \simeq z \vee z_1 = 0 \wedge \rho_3 \simeq z) \right).$$

Ak hodnota termu existuje, potom je určená jednoznačne:

$$\tau \simeq y \wedge \tau \simeq z \rightarrow y = z.$$

Ak τ obsahuje len funkcie, potom $\tau \simeq y \leftrightarrow \tau = y$.

Čiastočné funkcie

Silná rovnosť (Kleene)

Označenie:

$\tau \downarrow \equiv \exists y \tau \simeq y$ (τ je definovaný, má hodnotu, konverguje)

$\tau \uparrow \equiv \neg \exists y \tau \simeq y$ (τ nie je definovaný, nemá hodnotu, diverguje).

Silná rovnosť $\tau \simeq \rho$ je definovaná predpisom

$$\tau \simeq \rho \equiv \exists y \exists z (\tau \simeq y \wedge \rho \simeq z \wedge y = z) \vee \tau \uparrow \wedge \rho \uparrow.$$

Platí

$$\tau \simeq \rho \leftrightarrow \forall y (\tau \simeq y \leftrightarrow \rho \simeq y)$$

$$\tau \simeq \tau \qquad \tau \simeq \rho \rightarrow \rho \simeq \tau$$

$$\tau \simeq \rho \wedge \rho \simeq \sigma \rightarrow \tau \simeq \sigma.$$

Ak termy τ, ρ obsahujú len funkcie, potom $\tau \simeq \rho \leftrightarrow \tau = \rho$.

Čiastočné funkcie

Explicitné definície čiastočných funkcií

Sú to definície čiastočných funkcií v tvare

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq \tau[x_1, \dots, x_n].$$

Funkcionálna rovnica má jediné riešenie. Je to n -árna čiastočná funkcia f definovaná vzťahom

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \forall y (f(x_1, \dots, x_n) \simeq y \leftrightarrow \tau[x_1, \dots, x_n] \simeq y).$$

Explicitné definície (totálnych) funkcií

$$f(x_1, \dots, x_n) = \tau[x_1, \dots, x_n]$$

sú špeciálnym prípadom explicitných definícií čiastočných funkcií.

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Veta

Funkcionálna rovnica v neznámej f :

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \dots, x_n]$$

má najmenšie riešenie n -árnu čiastočnú funkciu $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$, ktorá je limitou reťazca $f_0, f_1, f_2, \dots$ definovaného predpisom

$$f_0 = \emptyset^{(n)}$$

$$f_{i+1}(x_1, \dots, x_n) \simeq \tau[f_i; x_1, \dots, x_n].$$

Poznámka

Toto je prvá časť originálnej Kleeneho prvej vety o rekurzii. V druhej časti sa tvrdí, že najmenšie riešenie je vypočítateľné.

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Funkcionálna notácia

Symbolom $\tau[f]$ označme n -árnu čiastočnú funkciu definovanú predpisom:

$$\tau[f](x_1, \dots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \dots, x_n].$$

Kleeneho prvá veta o rekurzii charakterizuje pevné body funkcionálu $\lambda f. \tau[f]$.

Veta o pevnom bode

Funkcionálna rovnica v neznámej f :

$$f = \tau[f]$$

má najmenšie riešenie n -árnu čiastočnú funkciu $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$, ktorá je limitou reťazca $f_0, f_1, f_2, \dots$ definovaného predpisom

$$f_0 = \emptyset^{(n)} \qquad f_{i+1} = \tau[f_i].$$

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Lema (Monotónnosť)

Pre ľubovoľné n -árne čiastočné funkcie f a g platí

$$f \subseteq g \rightarrow \tau[f] \subseteq \tau[g].$$

Dôkaz

Indukciou na štruktúru termu τ .

Dôsledok

Ak postupnosť n -árnych čiastočných funkcií

$$f_0, f_1, f_2, \dots, f_i, \dots$$

je reťazec, potom aj táto postupnosť n -árnych čiastočných funkcií

$$\tau[f_0], \tau[f_1], \tau[f_2], \dots, \tau[f_i], \dots$$

je reťazec.

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Lema (Monotónnosť)

Pre ľubovoľné n -árne čiastočné funkcie f a g platí

$$\forall \vec{x} \forall y (f(\vec{x}) \simeq y \rightarrow g(\vec{x}) \simeq y) \rightarrow \forall \vec{x} \forall y (\tau[f; \vec{x}] \simeq y \rightarrow \tau[g; \vec{x}] \simeq y).$$

Dôkaz

Indukciou na štruktúru termu τ .

Dôsledok

Ak postupnosť n -árnych čiastočných funkcií

$$f_0, f_1, f_2, \dots, f_i, \dots$$

je reťazec, potom aj táto postupnosť n -árnych čiastočných funkcií

$$\tau[f_0], \tau[f_1], \tau[f_2], \dots, \tau[f_i], \dots$$

je reťazec.

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Lema (Spojitosť)

Pre ľubovoľný reťazec n -árnych čiastočných funkcií

$$f_0, f_1, f_2, \dots, f_i, \dots$$

platí vzťah

$$\tau\left[\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i\right] = \bigcup_{i=0}^{\infty} \tau[f_i].$$

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Lema (Spojitosť)

Pre ľubovoľný reťazec n -árnych čiastočných funkcií

$$f_0, f_1, f_2, \dots, f_i, \dots$$

platí vzťah

$$\forall \vec{x} \forall y \left(\tau \left[\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i; \vec{x} \right] \simeq y \leftrightarrow \exists i \tau[f_i; \vec{x}] \simeq y \right).$$

Dôkaz

Implikácia ($\leftarrow$) je priamočiary dôsledok monotónosti. Opačná implikácia sa dokazuje indukciou na štruktúru termu τ .

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Dôkaz vety o pevnom bode

- Postupnosť $f_0, f_1, f_2, \dots$ je reťazec, t.j.

$$\forall i \ f_i \subseteq f_{i+1}.$$

- Limita reťazca $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$ je riešenie funkcionálnej rovnice, t.j.

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i = \tau[\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i].$$

- Limita reťazca $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$ je najmenšie riešenie, t. j. ak g je riešenie funkcionálnej rovnice, potom

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i \subseteq g.$$

Tu stačí dokázať

$$\forall i \ f_i \subseteq g.$$

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Dôkaz vety o pevnom bode

- Postupnosť $f_0, f_1, f_2, \dots$ je reťazec, t.j.

$$\forall i \forall \vec{x} \forall y (f_i(\vec{x}) \simeq y \rightarrow f_{i+1}(\vec{x}) \simeq y).$$

- Limita reťazca $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$ je riešenie funkcionálnej rovnice, t.j.

$$\forall \vec{x} (\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i)(\vec{x}) \simeq \tau[\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i; \vec{x}].$$

- Limita reťazca $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$ je najmenšie riešenie, t. j. ak g je riešenie funkcionálnej rovnice, potom

$$\forall \vec{x} \forall y ((\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i)(\vec{x}) \simeq y \rightarrow g(\vec{x}) \simeq y).$$

Tu stačí dokázať

$$\forall i \forall \vec{x} \forall y (f_i(\vec{x}) \simeq y \rightarrow g(\vec{x}) \simeq y).$$

Rekurzívne definície

Rekurzívne definície čiastočných funkcií

Sú to definície čiastočných funkcií v tvare

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \dots, x_n].$$

Čiastočnou funkciou, ktorá je definovaná uvedeným vzťahom, rozumieme najmenšie riešenie tejto funkcionálnej rovnice v triede n -árnych čiastočných funkcií. Existencia takého riešenia plynie z Kleeneho prvej vety o rekurzii.

Poznámka

Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií

$$f(x_1, \dots, x_n) = \tau[f; x_1, \dots, x_n]$$

sú špeciálnym prípadom rekurzívnych definícií čiastočných funkcií. Tento fakt je to dôsledok nasledujúcich dvoch viet.

Rekurzívne definície

Veta

Predpokladajme, že

$$f(x_1, \dots, x_n) = \tau[f; x_1, \dots, x_n]$$

je regulárna rekurzívna definícia n -árnej funkcie f . Potom funkcionálna rovnica v triede n -árnych čiastočných funkcií

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \dots, x_n]$$

je rekurzívna definícia tej istej funkcie f .

Rekurzívne definície

Dôkaz.

Predpokladajme, že rekurzívna definícia je regulárna v dobre založenej relácii $\prec$. Nech g je riešenie funkcionálnej rovnice

$$g(x_1, \dots, x_n) \simeq \tau[g; x_1, \dots, x_n]. \quad (1)$$

$\prec$ -indukciou podľa $x_1, \dots, x_n$ dokážeme tvrdenie

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq g(x_1, \dots, x_n).$$

V indukčnom kroku pre $x_1, \dots, x_n$ dokážeme pomocné tvrdenie

$$\Gamma_\rho^\tau[f; x_1, \dots, x_n] \rightarrow \rho[f; x_1, \dots, x_n] \simeq \rho[g; x_1, \dots, x_n] \quad (2)$$

pre každý podterm ρ termu τ strážený podmienkou Γ_ρ^τ v τ . Odtiaľ

$$f(x_1, \dots, x_n) = \tau[f; x_1, \dots, x_n] \stackrel{(2)}{\simeq} \tau[g; x_1, \dots, x_n] \stackrel{(1)}{\simeq} g(x_1, \dots, x_n).$$

Rekurzívne definície

Veta

Predpokladajme, že

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \dots, x_n]$$

je rekurzívna definícia n -árnej čiastočnej funkcie f . Predpokladajme ďalej, že f a všetky pomocné čiastočné funkcie v terme τ sú totálne. Potom funkcionálna rovnica v triede n -árnych funkcií

$$f(x_1, \dots, x_n) = \tau[f; x_1, \dots, x_n]$$

je regulárna rekurzívna definícia tej istej funkcie f .

Rekurzívne definície

Dôkaz.

Podľa prvej vety o rekurzii funkcia f sa dá vyjadriť v tvare $f = \bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$, kde $f_0, f_1, f_2, \dots$ je reťazec definovaný predpisom

$$f_0 = \emptyset^{(n)} \qquad f_{i+1}(x_1, \dots, x_n) \simeq \tau[f_i; x_1, \dots, x_n].$$

Definícia dobre založenej relácie $\prec$:

$$m(x_1, \dots, x_n) = \text{najmenšie } i \text{ také, že } f_i(x_1, \dots, x_n) \downarrow \\ (x_1, \dots, x_n) \prec (y_1, \dots, y_n) \leftrightarrow m(x_1, \dots, x_n) < m(y_1, \dots, y_n).$$

Potom funkcionálna rovnica

$$f(x_1, \dots, x_n) = \tau[f; x_1, \dots, x_n]$$

je regulárna rekurzívna definícia do dobre založenej relácie $\prec$. Jej (jediným) riešením je funkcia f .

Výpočtový model

Úvod

Uvažujme rekurzívnu definíciu n -árnej čiastočnej funkcie f v tvare

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \dots, x_n].$$

Chceme ukázať, že f je vypočítateľná vo výpočtovom modeli, ktorý je založený na vyhodnocovaní výrazov.

Označenie a predpoklady

- ▶ $g_1, \dots, g_k$ sú všetky pomocné čiastočné funkcie v τ .
- ▶ Každá nenulová konštanta c v terme τ je nahradená odpovedajúcim monadickým numerálom:

$$\overbrace{S \dots S}^{c\text{-krát}}(0).$$

Výpočtový model

Monadické numerály

Výpočet prebieha na monadických numeráloch:

$$0 \quad S(0) \quad SS(0) \quad SSS(0) \quad SSSS(0) \quad \dots$$

Označenie:

- ▶ Ak x je prirodzené číslo, potom $\underline{x}$ je monadický numerál, ktorého hodnota je číslo x :

$$\underline{x} \equiv \overbrace{S \dots S}^{x\text{-krát}}(0).$$

- ▶ Ak $x_1, \dots, x_n$ sú prirodzené čísla, potom

$$\underline{x_1, \dots, x_n} \equiv \underline{x_1}, \dots, \underline{x_n} \equiv \overbrace{S \dots S}^{x_1\text{-krát}}(0), \dots, \overbrace{S \dots S}^{x_n\text{-krát}}(0).$$

Výpočtový model

Jeden krok výpočtu

Ak uzavretý term ρ nie je numerál, tak musí obsahovať aspoň jeden podvýraz (*redex*) v tvare

$$D(\underline{x}, \rho_2, \rho_3) \quad g_1(\underline{y_1}, \dots, \underline{y_{m_1}}) \quad \dots \quad g_k(\underline{y_1}, \dots, \underline{y_{m_k}}) \quad f(\underline{x_1}, \dots, \underline{x_n}).$$

Jeden výpočtový krok spočíva v nájdení najľavejšieho redexu a jeho nahradením kontrakciou podľa nasledujúcich pravidiel

$$D(\underline{0}, \rho_2, \rho_3) \triangleright_1 \rho_3$$

$$D(\underline{x+1}, \rho_2, \rho_3) \triangleright_1 \rho_2$$

$$g_i(\underline{y_1}, \dots, \underline{y_{m_i}}) \triangleright_1 \underline{g_i(y_1, \dots, y_{m_i})} \quad \text{pre } i = 1, \dots, k$$

$$f(\underline{x_1}, \dots, \underline{x_n}) \triangleright_1 \tau[f; \underline{x_1}, \dots, \underline{x_n}].$$

Tak dostaneme nový uzavretý term σ a píšeme

$$\rho \triangleright_1 \sigma.$$

Výpočtový model

Viac krokov výpočtu

Označenie:

- ▶ $\rho_1 \triangleright_k \rho_2$, ak výraz ρ_1 sa redukuje do výrazu ρ_2 po k krokoch. To znamená, že existujú uzavreté rekurzívne termy $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k$ také, že

$$\rho_1 \equiv \sigma_0 \triangleright_1 \sigma_1 \triangleright_1 \dots \triangleright_1 \sigma_k \equiv \rho_2.$$

Umožníme tiež prípad $k = 0$. Vtedy $\rho_1 \triangleright_0 \rho_2 \leftrightarrow \rho_1 \equiv \rho_2$.

- ▶ $\rho_1 \triangleright \rho_2$, ak $\rho_1 \triangleright_k \rho_2$ pre nejaké k .

Platí

$$\begin{aligned} \rho \triangleright \sigma_1 \wedge \rho \triangleright \sigma_2 &\rightarrow \sigma_1 \triangleright \sigma_2 \vee \sigma_2 \triangleright \sigma_1 \\ \underline{y} \triangleright \sigma &\leftrightarrow \sigma \equiv \underline{y}. \end{aligned}$$

Ak $\rho \triangleright \underline{y}$, tak vravíme, že výpočet skončil s výsledkom y .

Výpočtový model

Lema (Korektnosť)

Platí

$$f(\underline{x_1}, \dots, \underline{x_n}) \triangleright \underline{y} \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \simeq y.$$

Dôkaz.

Indukciou podľa k dokážeme, že pre každý uzavretý term ρ platí

$$\rho \triangleright_k \underline{y} \rightarrow \rho \simeq y. \quad (1)$$

Nech $f(\underline{\vec{x}}) \triangleright \underline{y}$. Potom

$$f(\underline{x_1}, \dots, \underline{x_n}) \triangleright_1 \tau[f; \underline{x_1}, \dots, \underline{x_n}] \triangleright_k \underline{y}$$

pre nejaké číslo k . Odtiaľ

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \dots, x_n] \stackrel{(1)}{\simeq} y.$$

Výpočtový model

Lema (Úplnosť)

Platí

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq y \rightarrow f(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) \triangleright \underline{y}.$$

Dôkaz.

Podľa prvej vety o rekurzii čiastočná funkcia f sa dá vyjadriť v tvare $f = \bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$, kde $f_0, f_1, f_2, \dots$ je reťazec definovaný predpisom

$$f_0 = \emptyset^{(n)} \qquad f_{i+1}(x_1, \dots, x_n) \simeq \tau[f_i; x_1, \dots, x_n].$$

Indukciou podľa i dokážeme, že platí

$$f_i(x_1, \dots, x_n) \simeq y \rightarrow f(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) \triangleright \underline{y}. \quad (1)$$

Odtiaľ dostaneme

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq y \Rightarrow \exists i \, f_i(x_1, \dots, x_n) \simeq y \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) \triangleright \underline{y}.$$

Výpočtový model

Veta (Ekvivalentnosť výpočtovej a definičnej sémantiky)

Platí

$$f(\underline{x_1}, \dots, \underline{x_n}) \triangleright \underline{y} \leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n) \simeq y.$$

Dôkaz.

Priamy dôsledok predošlých dvoch pomocných tvrdení.

Poznámka

Toto je druhá časť originálnej Kleeneho prvej vety o rekurzii.

Záver

9. cvičenie

- ▶ Výsledky s komentárom nájdete na webe.

10. cvičenie

- ▶ Začína v stredu o 09:50 v miestnosti F1-248.
- ▶ Semestrálny test.

11. prednáška

- ▶ Aritmetizácia výpočtového modelu pre čiastočne rekurzívne funkcie.