

1-INF-450 Logika pre informatikov

Zimný semester 2013/14

7. prednáška

Ján Komara

Obsah 7. prednášky

Zopakovanie

Príklady rekurzívnych definícií s mierou

Syntaktická forma rekurzie s mierou

Regulárne rekurzívne definície s mierou

Charakterizačný problém

Poza primitívnu rekurziu

Ackermannova funkcia

Záver

Zopakovanie

Primitívne rekurzívne funkcie

- ▶ Základný vývoj primitívne rekurzívnych funkcií.
- ▶ Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia.
- ▶ Párovacia funkcia a aritmetizácia dátových štruktúr.
- ▶ Vnorená jednoduchá rekurgia:

$$f(0, y) = g(y)$$

$$f(x + 1, y) = h\left(x, f(x, s_1(x, y)), f(x, s_2(x, y, f(x, s_1(x, y)))), y\right).$$

- ▶ Regulárne rekurzívne definície s mierou:

$$f(\vec{x}) = \tau[f; \vec{x}].$$

Podmienka regularity $\Gamma_{f(\vec{\rho})} \rightarrow \mu[\vec{\rho}] < \mu[\vec{x}]$ pre rekurzívne volanie $f(\vec{\rho})$ funkcie f v terme τ .

Zopakovanie

Vnorená jednoduchá rekúzia

Sú to definície v tvare

$$\begin{aligned}f(0, \vec{y}) &= \rho[\vec{y}] \\ f(x+1, \vec{y}) &= \tau[f(x, \cdot); x, \vec{y}].\end{aligned}$$

Alternatívna formulácia (toto je klauzálna forma definície):

$$\begin{aligned}f(0, \vec{y}) &= \rho[\vec{y}] \\ f(x+1, \vec{y}) &= \theta[x, \vec{z}, \vec{y}] \leftarrow \bigwedge_{i=1}^k f(x, \vec{\sigma}_i[x, \vec{y}, z_1, \dots, z_{i-1}]) = z_i.\end{aligned}$$

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na vnorenú jednoduchú rekúziu.

Príklady rekurzívnych definícií s mierou

Euklidov algoritmus pre výpočet najväčšieho spoločného deliteľa

Rekurzívna definícia s mierou $\max(x, y)$:

```
gcd(x, y) = if  $x \neq 0 \wedge y \neq 0$  then  
    case  
         $x > y \Rightarrow \text{gcd}(x \div y, y)$   
         $x = y \Rightarrow x$   
         $x < y \Rightarrow \text{gcd}(x, y \div x)$   
    end  
else  
    max(x, y).
```

Podmienky regularity zaručujú, že výpočet vždy skončí:

$$\begin{aligned}x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge x > y &\rightarrow \max(x \div y, y) < \max(x, y) \\x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge x < y &\rightarrow \max(x, y \div x) < \max(x, y).\end{aligned}$$

Príklady rekurzívnych definícií s mierou

Aproximačná funkcia pre funkciu gcd

Špecifikácia aproximačnej funkcie

$$z > \max(x, y) \rightarrow f^+(z, x, y) = \gcd(x, y).$$

Definícia aproximačnej funkcie má tvar jednoduchej rekurzcie

```
f+(0, x, y) = 0
f+(z + 1, x, y) = if x ≠ 0 ∧ y ≠ 0 then
    case
        x > y ⇒ f+(z, x ÷ y, y)
        x = y ⇒ x
        x < y ⇒ f+(z, x, y ÷ x)
    end
else
    max(x, y).
```

Primitívna rekurzívnosť $\gcd(x, y) = f^+(\max(x, y) + 1, x, y)$.

Príklady rekurzívnych definícií s mierou

Zarovnanie binárneho stromu

Klauzálna forma rekurzívnej definície:

$$\textit{Flatten}(0) = 0$$

$$\textit{Flatten} \langle u, 0 \rangle = \langle \textit{Flatten}(u), 0 \rangle$$

$$\textit{Flatten} \langle u, \langle v, w \rangle \rangle = \textit{Flatten} \langle \langle u, v \rangle, w \rangle.$$

Je to rekurgia s mierou $m(x)$:

$$m(0) = 0$$

$$m \langle v, w \rangle = m(v) + 2m(w) + 1.$$

Miera je primitívne rekurzívna funkcia (prečo?).

Podmienky regularity majú tvar

$$m(u) < m \langle u, 0 \rangle$$

$$m \langle \langle u, v \rangle, w \rangle < m \langle u, \langle v, w \rangle \rangle.$$

Príklady rekurzívnych definícií s mierou

Aproximačná funkcia pre funkciu *Flatten*

Špecifikácia aproximačnej funkcie

$$z > m(x) \rightarrow f^+(z, x) = \text{Flatten}(x).$$

Definícia aproximačnej funkcie má tvar jednoduchej rekurzíe

$$f^+(0, x) = 0$$

$$f^+(z + 1, 0) = 0$$

$$f^+(z + 1, \langle u, 0 \rangle) = \langle f^+(z, u), 0 \rangle$$

$$f^+(z + 1, \langle u, \langle v, w \rangle \rangle) = f^+(z, \langle \langle u, v \rangle, w \rangle).$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie *Flatten* plynie z tohoto vyjadrenia

$$\text{Flatten}(x) = f^+(m(x) + 1, x).$$

Príklady rekurzívnych definícií s mierou

McCarthyho 91 funkcia

Definícia:

$$f_{91}(x) = \begin{cases} 91 & \text{ak } x \leq 101, \\ x \div 10 & \text{ak } x \geq 101. \end{cases}$$

Alternatívne vyjadrenie pomocou vnorenej rekurzcie

$$f_{91}(x) = \text{if } x < 101 \text{ then } f_{91} f_{91}(x + 11) \text{ else } x \div 10.$$

Je to korektná definícia?

Tvrdíme, že je to spätná rekurgia s mierou $101 \div x$. Podmienky regularity majú teda tvar

$$\begin{aligned} x < 101 &\rightarrow 101 \div (x + 11) < 101 \div x \\ x < 101 &\rightarrow 101 \div f_{91}(x + 11) < 101 \div x. \end{aligned}$$

Ako splniť druhú podmienku?

Príklady rekurzívnych definícií s mierou

Splnenie podmienok regularity pre McCarthyho 91 funkciu

Uvažujme funkciu f definovanou rekurzívnou rovnosťou

$$f(x) = \text{if } x < 101 \text{ then } [f]_x[f]_x(x + 11) \text{ else } x \div 10. \quad (1)$$

Tu $[f]_x(y)$ je *zúženie* f na vstupy y také, že $101 \div y < 101 \div x$:

$$[f]_x(y) \equiv \text{if } 101 \div y < 101 \div x \text{ then } f(y) \text{ else } 0. \quad (2)$$

Každá rekurzívna aplikácia v (1) je strážená kontextom v tvare (2).
Je to korektná definícia.

Funkcia f spĺňa podmienky regularity pôvodnej rekurzívnej rovnice:

$$\begin{aligned} x < 101 &\rightarrow 101 \div (x + 11) < 101 \div x \\ x < 101 &\rightarrow 101 \div f(x + 11) < 101 \div x. \end{aligned}$$

Táto funkcia je tiež jediným riešením pôvodnej rekurzívnej rovnice.

Príklady rekurzívnych definícií s mierou

Aproximačná funkcia pre McCarthyho 91 funkciu

Špecifikácia aproximačnej funkcie

$$z > 101 \div x \rightarrow f^+(z, x) = f_{91}(x).$$

Definícia aproximačnej funkcie má tvar vnorenej jednoduchšej rekurzíe

$$\begin{aligned} f^+(0, x) &= 0 \\ f^+(z + 1, x) &= \text{if } x < 101 \text{ then} \\ &\quad f^+(z, f^+(z, x + 11)) \\ &\quad \text{else} \\ &\quad x \div 10. \end{aligned}$$

Primitívna rekurzívnosť McCarthyho 91 funkcie plynie z tohoto vyjadrenia

$$f_{91}(x) = f^+(101 \div x + 1, x).$$

Syntaktická forma rekurzíe s mierou

Rekurzia s mierou $\mu[\vec{x}]$

Sú to definície v tvare

$$f(\vec{x}) = \tau \left[[f]_{\vec{x}}^{\mu}; \vec{x} \right]. \quad (1)$$

Term na pravej strane rovnosti vznikol s termu $\tau[f; \vec{x}]$ nahradením každej rekurzívnej aplikácie $f(\vec{\rho})$ výrazom

$$[f]_{\vec{x}}(\vec{\rho}) \equiv \text{if } \mu[\vec{\rho}] < \mu[\vec{x}] \text{ then } f(\vec{\rho}) \text{ else } 0.$$

Každá rekurzívna aplikácia $f(\vec{\rho})$ v (1) je teda strážená podmienkou $\mu[\vec{\rho}] < \mu[\vec{x}]$.

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na rekurziu s mierou.

Syntaktická forma rekurzcie s mierou

Dôkaz

Špecifikácia aproximačnej funkcie

$$z > \mu[\vec{x}] \rightarrow f^+(z, \vec{x}) = f(\vec{x}).$$

Definícia aprox. funkcie má tvar vnorenej jednoduchšej rekurzcie

$$\begin{aligned} f^+(0, \vec{x}) &= 0 \\ f^+(z + 1, \vec{x}) &= \tau[[f^+]_{z, \vec{x}}^\mu; z, \vec{x}]. \end{aligned}$$

Term na pravej strane druhej rovnosti vznikol s termu $\tau[f; \vec{x}]$ nahradením každej rekurzívnej aplikácie $f(\vec{\rho})$ výrazom

$$[f^+]_{z, \vec{x}}^\mu(\vec{\rho}) \equiv \text{if } \mu[\vec{\rho}] < \mu[\vec{x}] \text{ then } f^+(z, \vec{\rho}) \text{ else } 0.$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$f(\vec{x}) = f^+(\mu[\vec{x}] + 1, \vec{x}).$$

Regulárne rekurzívne definície s mierou

Regulárna rekurgia s mierou $\mu[\vec{x}]$

Sú to definície v tvare

$$f(\vec{x}) = \tau[f; \vec{x}], \quad (1)$$

pre ktoré sú splnené podmienky regularity.

Podmienky regularity majú tvar:

$$\Gamma_{f(\vec{\rho})}^{\tau}[f; \vec{x}] \rightarrow \mu[\vec{\rho}[f; \vec{x}]] < \mu[\vec{x}]$$

pre každú rekurzívnu aplikáciu $f(\vec{\rho})$ funkcie f , ktorá je strážená podmienkou $\Gamma_{f(\vec{\rho})}^{\tau}$ v terme τ .

Splnenie podmienok regularity sa overuje pre funkciu, ktorá je definovaná pridruženou rovnosťou:

$$f(\vec{x}) = \tau[[f]_{\vec{x}}^{\mu}; \vec{x}].$$

Táto funkcia je potom jediným riešením funkcionálnej rovnice (1).

Regulárne rekurzívne definície s mierou

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na regulárnu rekúziu s mierou.

Dôkaz

Pridružená rovnosť má tvar syntaktickej formy rekúzie s mierou:

$$f(\vec{x}) = \tau \left[[f]_{\vec{x}}^{\mu}; \vec{x} \right].$$

Funkcia f definovaná týmto vzťahom je preto primitívne rekurzívna.

Poznámka

Číslo $\mu[\vec{x}] + 1$ predstavuje horný odhad na hĺbku výpočtového stromu pre výpočet aplikácie $f(\vec{x})$ pomocou programu

$$f(\vec{x}) = \tau[f; \vec{x}].$$

Charakterizačný problém

Veta

Trieda primitívne rekurzívnych funkcií je najmenšia trieda funkcií, ktorá obsahuje funkciu nasledovníka $S(x) = x + 1$, funkciu predchodcu $x \div 1$ a je uzavretá na explicitné definície a regulárnu rekurziu s mierou.

Dôkaz.

Označenie:

- ▶ PRIM = trieda primitívne rekurzívnych funkcií.
- ▶ REG = najmenšia trieda funkcií, ktorá obsahuje funkciu nasledovníka $S(x) = x + 1$, funkciu predchodcu $x \div 1$ a je uzavretá na explicitné definície a regulárnu rekurziu s mierou.

Cieľom je dokázať rovnosť

$$\text{PRIM} = \text{REG}.$$

Charakterizačný problém

Dôkaz inklúzie $\text{PRIM} \subseteq \text{REG}$

- ▶ $S \in \text{REG}$, pretože S je základná funkcia triedy REG .
- ▶ $Z \in \text{REG}$ plynie z tohoto vyjadrenia $Z(x) = 0$.
- ▶ $I_i^n \in \text{REG}$ plynie z tohoto vyjadrenia $I_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$.
- ▶ Trieda REG je uzavretá na operátor kompozície funkcií:

$$f(x_1, \dots, x_n) = h(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Je to totiž špeciálny prípad explicitnej definície.

- ▶ Trieda REG je uzavretá na operátor primitívnej rekúrie:

$$f(0, \vec{y}) = g(\vec{y}) \qquad f(x + 1, \vec{y}) = h(x, f(x, \vec{y}), \vec{y}).$$

Je to špeciálny prípad regulárnej rekúrie s mierou $\mu[x, \vec{y}] = x$:

$$f(x, \vec{y}) = \text{if } x \neq 0 \text{ then } h(x \div 1, f(x \div 1, \vec{y}), \vec{y}) \text{ else } g(\vec{y}).$$

Charakterizačný problém

Dôkaz inklúzie $\text{REG} \subseteq \text{PRIM}$

- ▶ $S \in \text{PRIM}$, pretože S je základná funkcia triedy PRIM .
- ▶ $\lambda x.x \div 1 \in \text{PRIM}$ plynie z tohoto vyjadrenia

$$0 \div 1 = 0$$

$$x + 1 \div 1 = x.$$

- ▶ Trieda PRIM je uzavretá na explicitné definície funkcií:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \tau[x_1, \dots, x_n].$$

Dôkaz tvrdenia na 3. prednáške.

- ▶ Trieda PRIM je uzavretá na regulárnu rekúziu s mierou:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \tau[f; x_1, \dots, x_n].$$

Dôkaz tvrdenia na tejto prednáške.

Ackermannova funkcia

Ackermannova funkcia (1928)

Postupnosť binárnych p.r. funkcií A_x ($x = 0, 1, 2, \dots$):

$$A_0(y, z) = y + z$$

$$A_1(y, z) = y \cdot z$$

$$A_2(y, z) = y^z.$$

Definícia $\lambda xyz. A_x(y, z)$ pomocou vnorenej dvojitej rekurzie

$$A_0(y, z) = y + z$$

$$A_{x+1}(y, 0) = (x =_* 1) + (x \geq_* 2) \cdot y$$

$$A_{x+1}(y, z + 1) = A_x(y, A_{x+1}(y, z)).$$

Táto funkcia nie je primitívne rekurzívna, pretože jej diagonalizácia $\lambda x. A_x(x, x)$ rastie rýchlejšie ako každá unárna p.r. funkcia.

Ackermannova funkcia

Ackermann-Péterovej funkcia

Definícia pomocou vnorenej dvojitej rekurzcie

$$A(0, y) = y + 1$$

$$A(x + 1, 0) = A(x, 1)$$

$$A(x + 1, y + 1) = A(x, A(x + 1, y)).$$

Napríklad:

$$A(1, y) = y + 2$$

$$A(2, y) = 2 \cdot y + 3 = 2 \cdot (y + 3) \div 3$$

$$A(3, y) = 8 \cdot 2^y \div 3 = 2^{y+3} \div 3.$$

Funkcia nie je primitívne rekurzívna, pretože jej diagonalizácia $\lambda x. A(x, x)$ rastie rýchlejšie ako každá unárna p.r. funkcia

Ackermannova funkcia

Podmienky regularity pre Ackermann-Péterovej funkciu

Lexikografické usporiadanie dvojíc prirodzených čísel

$$(a, b) <_{\text{lex}} (c, d) \leftrightarrow a < c \vee a = c \wedge b < d.$$

Je to dobré usporiadanie: každá klesajúca postupnosť je konečná

$$(a_1, b_1) >_{\text{lex}} (a_2, b_2) >_{\text{lex}} (a_3, b_3) >_{\text{lex}} (a_4, b_4) >_{\text{lex}} \cdots$$

Podmienky regularity pre funkciu $A(x, y)$ sú triviálne splnené:

$$\begin{aligned}(x, 1) &<_{\text{lex}} (x + 1, 0) \\(x + 1, y) &<_{\text{lex}} (x + 1, y + 1) \\(x, A(x + 1, y)) &<_{\text{lex}} (x + 1, y + 1).\end{aligned}$$

Definícia transfinitnou rekúziou do dobrého usporiadania $<_{\text{lex}}$.

Ackermannova funkcia

Graf Ackermann-Péterovej funkcie

Funkcia $A(x, y)$ nie je primitívne rekurzívna, ale jej graf

$$G(x, y, z) \leftrightarrow A(x, y) = z$$

je primitívne rekurzívny predikát.

Idea dôkazu: vyjadriť graf v tvare

$$G(x, y, z) \leftrightarrow \exists s \leq b(z) (Cvs(s) \wedge \langle x, y, z \rangle \varepsilon s),$$

kde

- ▶ $Cvs(s)$ je p.r. predikát, ktorý platí, ak s je postupnosť histórie výpočtu Ackermann-Péterovej funkcie;
- ▶ $b(z)$ je p.r. funkcia, ktorá dáva odhad na veľkosť takejto postupnosti pre výsledok výpočtu z .

Záver

6. cvičenie

- ▶ Výsledky s komentárom nájdete na webe.

7. cvičenie

- ▶ Začína v stredu o 09:50 v miestnosti F1-248.
- ▶ Pracujte samostatne.
- ▶ Úlohy odovzdať najneskôr do 12:00 v pondelok budúci týždeň.

8. prednáška

- ▶ Poza primitívnu rekurziu:
 - ▶ univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie.
- ▶ Obecne rekurzívne funkcie.
- ▶ μ -rekurzívne funkcie.