

1-INF-450 Logika pre informatikov

Zimný semester 2013/14

6. prednáška

Ján Komara

Obsah 6. prednášky

Zopakovanie

Rekurzia so substitúciou v parametri

Vnorená jednoduchá rekurzia

Záver

Zopakovanie

Primitívne rekurzívne funkcie

- ▶ Základný vývoj primitívne rekurzívnych funkcií.
- ▶ Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia.
- ▶ Párovacia funkcia a aritmetizácia dátových štruktúr.
- ▶ Vnorená jednoduchá rekurgia:

$$f(0, y) = g(y)$$

$$f(x + 1, y) = h\left(x, f(x, s_1(x, y)), f(x, s_2(x, y, f(x, s_1(x, y)))), y\right).$$

- ▶ Regulárne rekurzívne definície s mierou:

$$f(\vec{x}) = \tau[f; \vec{x}].$$

Podmienka regularity $\Gamma_{f(\vec{\rho})} \rightarrow \mu[\vec{\rho}] < \mu[\vec{x}]$ pre rekurzívne volanie $f(\vec{\rho})$ funkcie f v terme τ .

Zopakovanie

Cantorova párovacia funkcia (modifikovaná verzia)

$\langle x, y \rangle$	0	1	2	3	4	5	6	...
0	1	2	4	7	11	16	22	...
1	3	5	8	12	17	23	30	...
2	6	9	13	18	24	31	39	...
3	10	14	19	25	32	40	49	...
4	15	20	26	33	41	50	60	...
5	21	27	34	42	51	61	72	...
6	28	35	43	52	62	73	85	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=0}^{x+y} i + 1 + x.$$

Zopakovanie

Vlastnosti párovacej funkcie

Modifikovaná verzia Cantorovej párovacej funkcie má tieto základné vlastnosti:

$$\begin{aligned}\langle x_1, x_2 \rangle &= \langle y_1, y_2 \rangle \rightarrow x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \\ x &< \langle x, y \rangle \wedge y < \langle x, y \rangle \\ x &= 0 \vee \exists y \exists z x = \langle y, z \rangle.\end{aligned}$$

Pre $n \geq 3$ zapisujeme $\langle x_1, \langle x_2, \dots, x_n \rangle \rangle$ skrátené $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$.

Projekcie

Unárne projekcie π_1 a π_2 spĺňajú tieto identity:

$$\pi_1 \langle x, y \rangle = x \quad \pi_2 \langle x, y \rangle = y \quad \pi_1(0) = 0 = \pi_2(0).$$

Zopakovanie

Aritmetizácia karteziánskeho súčinu

Kódom n -tice $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ je číslo

$$\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in \mathbb{N}.$$

Binárny primitívne rekurzívny predikát $Tuple(n, x)$ platí, ak číslo x je kódom nejakej n -tice prirodzených čísel:

$$Tuple(n, x) \leftrightarrow n = 0 \wedge x = 0 \vee n = 1 \vee n \geq 2 \wedge \pi_2^{n-2}(x) \neq 0.$$

Zobecnením projekcií π_1, π_2 je ternárna funkcia $[x]_i^n$ taká, že

$$[\langle x_1, \dots, x_n \rangle]_i^n = x_i \quad \text{pre } 1 \leq i \leq n.$$

Primitívna rekurzívnosť plynie z tohoto vyjadrenia

$$[x]_i^n = \text{if } i \neq n \text{ then } \pi_1 \pi_2^{i-1}(x) \text{ else } \pi_2^{n-1}(x).$$

Zopakovanie

Aritmetizácia konečných postupností

Kódom konečnej postupnosti $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ je číslo

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n, 0 \rangle.$$

Kódom prázdnej postupnosti $\emptyset$ je číslo 0.

Funkcia $L(x)$ vypočíta dĺžku postupnosti x :

$$L \langle x_1, \dots, x_n, 0 \rangle = n.$$

Binárna operácia $(x)_i$ vráti $(i+1)$ -vý prvok postupnosti x :

$$(\langle x_0, \dots, x_i, \dots, x_{n-1}, 0 \rangle)_i = x_i \quad \text{pre } i < n.$$

Primitívna rekurzívnosť plynie z tohoto vyjadrenia

$$L(x) = \mu n \leq x[\pi_2^n(x) = 0] \qquad (x)_i = \pi_1 \pi_2^i(x).$$

Zopakovanie

Spätná rekurgia

Sú to definície v tvare

$$f(x, \vec{y}) = \begin{cases} \rho[x, \vec{y}] & \text{ak } x \geq \theta[\vec{y}], \\ \tau[x, f(x+1, \vec{y}), \vec{y}] & \text{ak } x < \theta[\vec{y}]. \end{cases}$$

'Course-of-values' rekurgia

Sú to definície v tvare

$$\begin{aligned} f(0, \vec{y}) &= \rho[\vec{y}] \\ f(x+1, \vec{y}) &= \tau[x, f(\xi_1[x, \vec{y}], \vec{y}), \dots, f(\xi_k[x, \vec{y}], \vec{y}), \vec{y}], \end{aligned}$$

kde $\xi_1[x, \vec{y}] \leq x \wedge \dots \wedge \xi_k[x, \vec{y}] \leq x$.

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na spätnú rekurgiu a 'course-of-values' rekurgiu.

Rekurzia so substitúciou v parametri

Príklad

Fibonacciho postupnosť

$$f_0 = 0 \quad f_1 = 1 \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

Efektívna implementácia

$$\begin{aligned} g(0, a, b) &= a \\ g(n+1, a, b) &= g(n, a+b, a) \\ f_0 &= 0 \\ f_{n+1} &= g(n, 1, 0). \end{aligned}$$

Pomocná funkcia $g(n, a, b)$ je definovaná rekurziou podľa n so substitúciou v parametri a a b .

Korektnosť implementácie plynie z tejto vlastnosti

$$g(n, f_{k+1}, f_k) = f_{n+1+k}.$$

Rekurzia so substitúciou v parametri

Rekurzia so substitúciou v parametri

Sú to definície v tvare

$$\begin{aligned}f(0, \vec{y}) &= \rho[\vec{y}] \\ f(x+1, \vec{y}) &= \tau[x, f(x, \vec{\sigma}_1[x, \vec{y}]), \dots, f(x, \vec{\sigma}_k[x, \vec{y}]), \vec{y}].\end{aligned}$$

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na rekurziu so substitúciou v parametri.

Poznámka

Vetu dokážeme pre prípad $k = 1$.

Rekurzia so substitúciou v parametri

Dôkaz vety pre prípad $k = 1$ a jeden parameter, časť prvá

Uvažujme definíciu v tvare

$$\begin{aligned}f(0, y) &= g(y) \\ f(x + 1, y) &= h\big(x, f(x, s(x, y)), y\big).\end{aligned}$$

Ukážeme, že funkcia histórie $\bar{f}$:

$$\begin{aligned}\bar{f}(0, y) &= \langle f(0, y), 0 \rangle \\ \bar{f}(x + 1, y) &= \langle f(x + 1, y), \bar{f}(x, s(x, y)) \rangle\end{aligned}$$

je primitívne rekurzívna.

Primitívna rekurzívnosť funkcie f potom plynie z tohoto vyjadrenia

$$f(x, y) = (\bar{f}(x, y))_0.$$

Rekurzia so substitúciou v parametri

Dôkaz vety pre prípad $k = 1$ a jeden parameter, časť druhá

Selektor pre rekurzívne argumenty

$$\mathbf{x}_i(x) = x \dot{-} i.$$

Selektor pre parametre

$$\mathbf{y}_0(x, y) = y \quad \mathbf{y}_{i+1}(x, y) = s(\mathbf{x}_i(x) \dot{-} 1, \mathbf{y}_i(x, y)).$$

Funkcia čiastočnej histórie

$$\overline{f}(x, y).i = \begin{cases} \langle g(\mathbf{y}_i(x, y)), 0 \rangle & \text{ak } i \geq x, \\ \langle h(\mathbf{x}_i(x) \dot{-} 1, (\overline{f}(x, y).(i+1))_0, \mathbf{y}_i(x, y)), \overline{f}(x, y).(i+1) \rangle & \text{ak } i < x. \end{cases}$$

Funkcia histórie

$$\overline{f}(x, y) = \overline{f}(x, y).0.$$

Rekurzia so substitúciou v parametri

Rekurzia so substitúciou v parametri a kontrakcia parametrov

Uvažujme definíciu v tvare

$$\begin{aligned}f(0, y_1, y_2) &= g(y_1, y_2) \\ f(x+1, y_1, y_2) &= h\left(x, f\left(x, s_1(x, y_1, y_2), s_2(x, y_1, y_2)\right), y_1, y_2\right).\end{aligned}$$

Ukážeme najprv, že binárna funkcia $\langle f \rangle(x, \langle y_1, y_2 \rangle) = f(x, y_1, y_2)$ je primitívne rekurzívna:

$$\begin{aligned}\langle f \rangle(0, y) &= g([y]_1^2, [y]_2^2) \\ \langle f \rangle(x+1, y) &= \\ &h\left(x, \langle f \rangle\left(x, \left\langle s_1(x, [y]_1^2, [y]_2^2), s_2(x, [y]_1^2, [y]_2^2) \right\rangle\right), [y]_1^2, [y]_2^2\right).\end{aligned}$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$f(x, y_1, y_2) = \langle f \rangle(x, \langle y_1, y_2 \rangle).$$

Rekurzia so substitúciou v parametri

Rekurzia so substitúciou v parametri a analýza prípadov

Uvažujme definíciu v tvare

$$\begin{aligned} f(0, y) &= g(y) \\ f(x+1, y) &= \begin{cases} h_1\left(x, f(x, s_1(x, y)), y\right) & \text{ak } R(x, y), \\ h_2\left(x, f(x, s_2(x, y)), y\right) & \text{ak } \neg R(x, y). \end{cases} \end{aligned}$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie f plyní z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned} h(x, z, y) &= \text{if } R(x, y) \text{ then } h_1(x, z, y) \text{ else } h_2(x, z, y) \\ s(x, y) &= \text{if } R(x, y) \text{ then } s_1(x, y) \text{ else } s_2(x, y) \\ f(0, y) &= g(y) \\ f(x+1, y) &= h\left(x, f(x, s(x, y)), y\right). \end{aligned}$$

Vnorená jednoduchá rekúzia

Vnorená jednoduchá rekúzia

Sú to definície v tvare

$$\begin{aligned}f(0, \vec{y}) &= \rho[\vec{y}] \\ f(x+1, \vec{y}) &= \tau[f(x, \cdot); x, \vec{y}].\end{aligned}$$

Alternatívna formulácia (toto je klauzálna forma definície):

$$\begin{aligned}f(0, \vec{y}) &= \rho[\vec{y}] \\ f(x+1, \vec{y}) &= \theta[x, \vec{z}, \vec{y}] \leftarrow \bigwedge_{i=1}^k f(x, \vec{\sigma}_i[x, \vec{y}, z_1, \dots, z_{i-1}]) = z_i.\end{aligned}$$

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na vnorenú jednoduchú rekúziu.

Vnorená jednoduchá rekurzia

Dôkaz vety pre prípad $k = 2$ a jeden parameter, časť prvá

Uvažujme definíciu v tvare

$$f(0, y) = g(y)$$

$$f(x + 1, y) = h\left(x, f(x, s_1(x, y)), f\left(x, s_2\left(x, y, f(x, s_1(x, y))\right)\right), y\right).$$

Ukážeme najprv, že funkcia histórie $\bar{f}$:

$$\bar{f}(0, y) = \langle f(0, y), 0, 0 \rangle$$

$$\bar{f}(x + 1, y) = \left\langle f(x + 1, y), \bar{f}(x, s_1(x, y)), \right. \\ \left. \bar{f}\left(x, s_2\left(x, y, f(x, s_1(x, y))\right)\right) \right\rangle.$$

je primitívne rekurzívna funkcia.

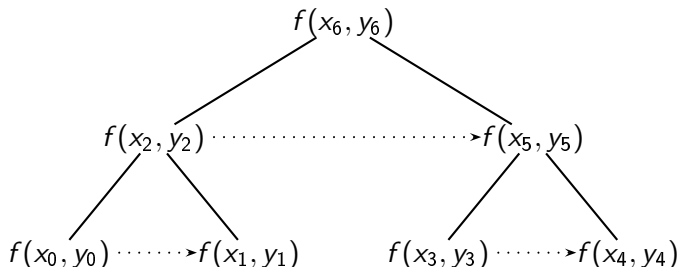
Primitívna rekurzívnosť funkcie f potom plynie z tohoto vyjadrenia

$$f(x, y) = \pi_1 \bar{f}(x, y).$$

Vnorená jednoduchá rekúzia

Dôkaz vety pre prípad $k = 2$ a jeden parameter, časť druhá

Príklad výpočtového stromu pre aplikáciu v tvare $f(2, \cdot)$:



Postupnosť histórie pre aplikáciu $f(x, y)$

$$f(x_0, y_0), f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), \dots, f(x_j, y_j), \dots, f(x_i, y_i), \dots$$

odpovedá spätnému prechodu výpočtového stromu $\bar{f}(x, y)$.

Vnorená jednoduchá rekurzia

Dôkaz vety pre prípad $k = 2$ a jeden parameter, časť tretia

Funkcia $U(x, y, t, i)$ modifikuje čiastočný výpočtový strom t pre aplikáciu $f(x, y)$ v pozícií i hodnotou $f(x_i, y_i)$:

$$U(0, y, t, i) = \langle g(y), 0, 0 \rangle$$
$$U(x+1, y, t, i) = \begin{cases} \langle z, U(x, s_1(x, y), l, i), r \rangle & \text{ak } i < 2^{x+1} \div 1 \text{ a} \\ & t = \langle z, l, r \rangle \text{ pre ne-} \\ & \text{jaké } z, l, r; \\ \langle z, l, U(x, s_2(x, y, \pi_1(l)), r, j) \rangle & \text{ak } i = 2^{x+1} \div 1 + j \\ & \text{pre } j < 2^{x+1} \div 1 \text{ a} \\ & t = \langle z, l, r \rangle \text{ pre ne-} \\ & \text{jaké } z, l, r; \\ \langle h(x, \pi_1(l), \pi_1(r), y), l, r \rangle & \text{ak } i = 2^{x+2} \div 2 \text{ a} \\ & t = \langle z, l, r \rangle \text{ pre ne-} \\ & \text{jaké } z, l, r; \\ 0 & \text{ináč.} \end{cases}$$

Je to rekurzia so substitúciou v parametri, funkcia je preto primitívne rekurzívna.

Vnorená jednoduchá rekúzia

Dôkaz vety pre prípad $k = 2$ a jeden parameter, časť štvrtá

Funkcia $M_i(x, y, t)$ modifikuje čiastočný výpočtový strom t pre aplikáciu $f(x, y)$ v každej pozícii $j < i$ hodnotou $f(x_j, y_j)$:

$$M_0(x, y, t) = t$$

$$M_{i+1}(x, y, t) = U(x, y, M_i(x, y, t), i).$$

Funkcia $Mkpbt(n)$ vytvorí perfektný binárny strom hĺbky n :

$$Mkpbt(0) = 0$$

$$Mkpbt(n + 1) = \langle 0, Mkpbt(n), Mkpbt(n) \rangle.$$

Funkcia $\bar{f}(x, y)$ vytvorí úplný výpočtový strom pre aplikáciu $f(x, y)$:

$$\bar{f}(x, y) = M_{2^{x+1}-1}(x, y, Mkpbt(x + 1)).$$

Všetky funkcie sú primitívne rekurzívne.

Záver

5. cvičenie

- ▶ Výsledky s komentárom nájdete na webe.

6. cvičenie

- ▶ Začína v stredu o 09:50 v miestnosti F1-248.
- ▶ Pracujte samostatne.
- ▶ Úlohy odovzdať najneskôr do 12:00 v pondelok budúci týždeň.

7. prednáška

- ▶ Regulárne rekurzívne definície s mierou.