

1-INF-450 Logika pre informatikov

Zimný semester 2013/14

4. prednáška

Ján Komara

Obsah 4. prednášky

Zopakovanie

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Spätná rekurzia

Záver

Zopakovanie

Cieľ predmetu

- ▶ Vybudovať matematické základy deklaratívnych programovacích jazykov.

Stručná osnova predmetu

- ▶ Primitívne rekurzívne funkcie
 - ▶ Aritmetizácia dátových štruktúr.
 - ▶ Regulárne rekurzívne definície s mierou.
- ▶ Obecné rekurzívne funkcie
 - ▶ Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií:
 - ▶ Ackermannova funkcia (1928),
 - ▶ univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie.
- ▶ Čiastočne rekurzívne funkcie
 - ▶ Kleeneho prvá veta o rekurzii (veta o pevnom bode).
 - ▶ Kleeneho veta o normálnej forme.
 - ▶ Churchova téza a algoritmicky nerozhodnuteľné problémy.

Zopakovanie

Primitívne rekurzívne funkcie

► Základné funkcie:

- konštantná funkcia $Z(x) = 0$,
- funkcia nasledovníka $S(x) = x + 1$,
- identity (projekcie):

$$I_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$$

pre každé $1 \leq i \leq n$.

► Kompozícia (skladanie) funkcií:

$$f(x_1, \dots, x_n) = h(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)).$$

► Primitívna rekurzia:

$$\begin{aligned} f(0, y_1, \dots, y_n) &= g(y_1, \dots, y_n) \\ f(S(x), y_1, \dots, y_n) &= h(x, f(x, y_1, \dots, y_n), y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

Zopakovanie

Primitívne rekurzívne odvodenia

$$0 + y = y$$

$$x + 1 + y = x + y + 1$$

$$0 \cdot y = 0$$

$$(x + 1) \cdot y = x \cdot y + y$$

$$x^0 = 1$$

$$x^{y+1} = x \cdot x^y$$

$$h(x, z, y) = S \, l_2^3(x, z, y)$$

$$0 + y = l(y)$$

$$S(x) + y = h(x, x + y, y)$$

$$h_2(x, z, y) = l_2^3(x, z, y) + l_3^3(x, z, y)$$

$$0 \cdot y = Z(y)$$

$$S(x) \cdot y = h_2(x, x \cdot y, y)$$

$$C_1(x) = S \, Z(x)$$

$$h_3(y, z, x) = l_3^3(y, z, x) \cdot l_2^3(y, z, x)$$

$$f(0, x) = C_1(x)$$

$$f(S(y), x) = h_3(y, f(y, x), x)$$

$$x^y = f(l_2^2(x, y), l_1^2(x, y))$$

Zopakovanie

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na operátor kompozície funkcií a primitívnej rekurzie.

Definícia

Trieda funkcií je primitívne rekurzívne uzavretá, ak obsahuje základné primitívne rekurzívne funkcie a je uzavretá na operátor kompozície funkcií a primitívnej rekurzie.

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú najmenšia primitívne rekurzívne uzavretá trieda funkcií:

$$\bigcap \{ \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ je p. r. uzavretá trieda funkcií} \}.$$

Zopakovanie

Explicitné definície

Sú to definície v tvare

$$f(x_1, \dots, x_n) = \tau[x_1, \dots, x_n].$$

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na explicitné definície.

Primitívne rekurzívne definície

Sú to definície v tvare

$$\begin{aligned} f(\vec{y}, 0, \vec{z}) &= \rho[\vec{y}, \vec{z}] \\ f(\vec{y}, x + 1, \vec{z}) &= \tau[\vec{y}, x, f(\vec{y}, x, \vec{z}), \vec{z}]. \end{aligned}$$

Veta

Prim. rek. funkcie sú uzavreté na primitívne rekurzívne definície.

Zopakovanie

Príklady primitívne rekurzívnych funkcií

- ▶ Sčítanie $x + y$.
- ▶ Násobenie $x \cdot y$.
- ▶ Umocňovanie x^y .
- ▶ Sumačná funkcia

$$\sum_{i=0}^n i = 0 + 1 + 2 + \cdots + n.$$

- ▶ Modifikované odčítanie

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y & \text{ak } x \geq y, \\ 0 & \text{ak } x < y. \end{cases}$$

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Charakteristická funkcia predikátu

Charakteristická funkcia n -árneho predikátu P je n -árna funkcia P_* definovaná predpisom

$$P_*(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{ak platí } P(x_1, \dots, x_n), \\ 0 & \text{ak neplatí } P(x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Notačná konvencia $x P_* y$ pre binárne predikáty s infixovou notáciou. Napr. $x =_* y$, $x \leq_* y$.

Primitívne rekurzívne predikáty

Predikát je primitívne rekurzívny, ak jeho charakteristická funkcia je primitívne rekurzívna funkcia.

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Jazyk formúl

Tvrdenia tvoríme z atomických formúl pomocou logických spojok a kvantifikátorov:

$\neg \varphi$	(negácia)
$\varphi \wedge \psi$	(konjunkcia)
$\varphi \vee \psi$	(disjunkcia)
$\varphi \rightarrow \psi$	(implikácia)
$\varphi \leftrightarrow \psi$	(ekvivalencia)
$\forall x \varphi$	(univerzálny kvantifikátor)
$\exists x \varphi$	(existenčný kvantifikátor)
$\forall x \leq \tau \varphi \equiv \forall x (x \leq \tau \rightarrow \varphi)$	(ohraničený kvantifikátor)
$\exists x \leq \tau \varphi \equiv \exists x (x \leq \tau \wedge \varphi)$	(ohraničený kvantifikátor)

Ohraničená formula obsahuje len ohraničené kvantifikátory.

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Notačné konvencie pri zápise formúl

Od najvyššej priority k najmenej:

- ▶ kvantifikátory,
- ▶ negácia,
- ▶ konjunkcia,
- ▶ disjunkcia,
- ▶ implikácia a ekvivalencia.

Príklad

Zadanie formuly v úplnej notácii

$$(\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \leftrightarrow ((\neg\varphi_3) \vee ((\exists x\varphi_4) \wedge \varphi_5)))).$$

Jej skrátený zápis

$$\varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \leftrightarrow \neg\varphi_3 \vee \exists x\varphi_4 \wedge \varphi_5.$$

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Explicitné definície predikátov

Sú to definície v tvare

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi[x_1, \dots, x_n].$$

Nás zaujíma hlavne prípad, keď φ je ohraničená formula.

Príklad

Explicitná definícia predikátu deliteľnosti

$$x \mid y \leftrightarrow \exists z \, y = x \cdot z.$$

Iná definícia tentokrát s ohraničenou formulou

$$x \mid y \leftrightarrow \exists z \leq y \, y = x \cdot z.$$

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Ohraničená minimalizácia

Sú to definície v tvare (φ je ohraničená formula)

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \text{najmenšie číslo } y \leq \tau[x_1, \dots, x_n] \text{ také, že platí} \\ \quad \varphi[x_1, \dots, x_n, y]; \\ 0, \text{ ak také číslo neexistuje.} \end{cases}$$

Skrátený zápis $f(\vec{x}) = \mu y \leq \tau[\vec{x}] [\varphi[\vec{x}, y]]$.

Príklad

Neúplný podiel

$$x \div y = q \leftrightarrow y = 0 \wedge q = 0 \vee y \neq 0 \wedge \exists r (x = q \cdot y + r \wedge r < y).$$

Iná definícia tentokrát ohraničenou minimalizáciou

$$x \div y = \mu q \leq x [x < (q + 1) \cdot y].$$

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Diskriminačná funkcia je primitívne rekurzívna

Ternárna diskriminačná funkcia D je definovaná predpisom

$$D(x, y, z) = v \leftrightarrow x \neq 0 \wedge v = y \vee x = 0 \wedge v = z.$$

Notačná konvencia

$$\begin{aligned} D(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &\equiv \text{if } \tau_1 \neq 0 \text{ then } \tau_2 \text{ else } \tau_3 \\ D(P_*(\vec{\tau}_1), \tau_2, \tau_3) &\equiv \text{if } P(\vec{\tau}_1) \text{ then } \tau_2 \text{ else } \tau_3. \end{aligned}$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie D plynie z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned} D(0, y, z) &= z \\ D(x + 1, y, z) &= y. \end{aligned}$$

Je to explicitná definícia s monadickou diskrimináciou.

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Rovnosť je primitívne rekurzívny predikát

Pretože $x = y \leftrightarrow x \div y + (y \div x) = 0$, primitívna rekurzívnosť funkcie $x =_* y$ plynie z tohoto vyjadrenia

$$(x =_* y) = D(x \div y + (y \div x), 0, 1).$$

Boolovské funkcie sú primitívne rekurzívne

Základné boolovské funkcie

$$(\neg_* x) = y \leftrightarrow x \neq 0 \wedge y = 0 \vee x = 0 \wedge y = 1$$

$$(x \wedge_* y) = z \leftrightarrow x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z = 1 \vee (x = 0 \vee y = 0) \wedge z = 0.$$

Primitívna rekurzívnosť bool. funkcií plynie z tohoto vyjadrenia

$$(\neg_* x) = D(x, 0, 1)$$

$$(x \wedge_* y) = D(x, D(y, 1, 0), 0).$$

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Operátor ohraničenej minimalizácie

Je to definícia v tvare

$$f(x, \vec{y}) = \mu z \leq x [g(z, \vec{y}) = 1].$$

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na operátor ohraničenej minimalizácie.

Dôkaz.

Primitívna rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$f(0, \vec{y}) = 0$$

$$f(x+1, \vec{y}) = \begin{cases} f(x, \vec{y}) & \text{ak } g(f(x, \vec{y}), \vec{y}) = 1, \\ x+1 & \text{ak } g(f(x, \vec{y}), \vec{y}) \neq 1 \text{ a } g(x+1, \vec{y}) = 1, \\ 0 & \text{ináč.} \end{cases}$$

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Veta

Primitívne rekurzívne predikáty sú uzavreté na explicitné definície predikátov s ohraničenými formulami.

Dôkaz.

Explicitná definícia predikátu s ohraničenou formulou:

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi[x_1, \dots, x_n].$$

Primitívna rekurzívnosť predikátu P_* plyní z tohoto vyjadrenia

$$P_*(x_1, \dots, x_n) = \varphi_*[x_1, \dots, x_n].$$

Tu φ_* je charakteristický term formuly φ :

$$(\varphi \rightarrow \varphi_* = 1) \wedge (\neg\varphi \rightarrow \varphi_* = 0).$$

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Konštrukcia φ_* indukzívne podľa štruktúry formuly φ

- Nekvantifikátorová formula

$$(\rho = \tau)_* \equiv (\rho =_* \tau)$$

$$(R(\vec{\tau}))_* \equiv R_*(\vec{\tau})$$

$$(\neg\psi)_* \equiv (\neg_*\psi_*)$$

$$(\psi \wedge \chi)_* \equiv (\psi_* \wedge_* \chi_*).$$

- Formula z ohraničeným kvantifikátorom

$$(\exists y \leq \tau \psi[y])_* \equiv \psi_* \left[\mu y \leq \tau [\psi_*[y] = 1] \right].$$

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Dôsledok

Nerovnosti sú primitívne rekurzívne predikáty.

Dôkaz.

Primitívna rekurzívnosť predikátov plynie z tohoto vyjadrenia

$$x \leq y \leftrightarrow \exists z \leq y \ x = z$$

$$x < y \leftrightarrow y \not\leq x$$

$$x \geq y \leftrightarrow y \leq x$$

$$x > y \leftrightarrow y < x.$$

Poznámka

Pretože platí ekvivalencia $x \leq y \leftrightarrow x \dot{-} y = 0$, primitívna rekurzívnosť funkcie $x \leq_* y$ plynie tiež z tohoto vyjadrenia

$$(x \leq_* y) = D(x \dot{-} y, 0, 1).$$

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na definície funkcií ohraničenou minimalizáciou.

Dôkaz.

Definícia funkcie ohraničenou minimalizáciou:

$$f(\vec{x}) = \mu y \leq \tau[\vec{x}] [\varphi[\vec{x}, y]].$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$P(y, \vec{x}) \leftrightarrow \varphi[\vec{x}, y]$$

$$g(z, \vec{x}) = \mu y \leq z [P_*(y, \vec{x}) = 1]$$

$$f(\vec{x}) = g(\tau[\vec{x}], \vec{x}).$$

Spätná rekúzia

Spätná rekúzia

Sú to definície v tvare

$$f(x, \vec{y}) = \begin{cases} \rho[x, \vec{y}] & \text{ak } x \geq \theta[\vec{y}], \\ \tau[x, f(x+1, \vec{y}), \vec{y}] & \text{ak } x < \theta[\vec{y}]. \end{cases}$$

Je to špeciálny prípad rekúzie s mierou $\theta[\vec{y}] \div x$.

Podmienka regularity:

$$x < \theta[\vec{y}] \rightarrow \theta[\vec{y}] \div (x+1) < \theta[\vec{y}] \div x.$$

Zdôvodnenie: $x < \theta[\vec{y}] \rightarrow x < x+1 \leq \theta[\vec{y}]$.

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na spätnú rekúziu.

Spätná rekúzia

Dôkaz vety pre špeciálny prípad

Uvažujme najprv definíciu v tvare

$$f(x, y) = \begin{cases} g(y) & \text{ak } x \geq b(y), \\ h(x, f(x+1, y), y) & \text{ak } x < b(y). \end{cases}$$

Tvrdíme, že existuje p.r. funkcia $\hat{f}$ taká, že

$$v + x = b(y) \rightarrow \hat{f}(v, y) = f(x, y).$$

Dôkaz:

$$\hat{f}(0, y) = g(y)$$

$$\hat{f}(v+1, y) = h(b(y) \div (v+1), \hat{f}(v, y), y).$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$f(x, y) = \hat{f}(b(y) \div x, y).$$

Spätná rekurgia

Dôkaz vety pre obecný prípad

Uvažujme teraz definíciu v tvare

$$f(x, y) = \begin{cases} g(x, y) & \text{ak } x \geq b(y), \\ h(x, f(x+1, y), y) & \text{ak } x < b(y). \end{cases}$$

Tvrdíme, že existuje p.r. funkcia $\hat{f}$ taká, že

$$v + x = b(y) \rightarrow \hat{f}(v, y) = f(x, y).$$

Dôkaz:

$$\hat{f}(0, y) = g(b(y), y) \quad \hat{f}(v+1, y) = h(b(y) \div (v+1), \hat{f}(v, y), y).$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$f(x, y) = \begin{cases} g(x, y) & \text{ak } x \geq b(y), \\ \hat{f}(b(y) \div x, y) & \text{ak } x \leq b(y). \end{cases}$$

Záver

Primitívne rekurzívne funkcie

- ▶ Základný vývoj primitívne rekurzívnych funkcií.
- ▶ Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia.
- ▶ Párovacia funkcia a aritmetizácia dátových štruktúr.
- ▶ Vnorená jednoduchá rekurgia:

$$f(0, y) = g(y)$$

$$f(x + 1, y) = h\left(x, f(x, s_1(x, y)), f(x, s_2(x, y, f(x, s_1(x, y)))), y\right).$$

- ▶ Regulárne rekurzívne definície s mierou:

$$f(\vec{x}) = \tau[f; \vec{x}].$$

Podmienka regularity $\Gamma_{f(\vec{\rho})} \rightarrow \mu[\vec{\rho}] < \mu[\vec{x}]$ pre rekurzívne volanie $f(\vec{\rho})$ funkcie f v terme τ .

Záver

3. cvičenie

- ▶ Výsledky s komentárom nájdete na webe.

4. cvičenie

- ▶ Začína v stredu o 09:50 v miestnosti F1-248.
- ▶ Pracujte samostatne.
- ▶ Úlohy odovzdať najneskôr do 12:00 v pondelok budúci týždeň.

5. prednáška

- ▶ Párovacia funkcia a aritmetizácia dátových štruktúr.