# 1-AIN-625 Úvod do matematickej logiky pre programátorov
# 1-INF-450 Logika pre informatikov

Zimný semester 2012/13

11. prednáška

Ján Komara

# Obsah 11. prednášky

# Zopakovanie

## Cieľ predmetu

- Vybudovať matematické základy deklaratívnych programovacích jazykov.

## Stručná osnova predmetu

- Primitívne rekurzívne funkcie
  - Aritmetizácia dátových štruktúr (Gödelizácia).
  - Regulárne rekurzívne definície s mierou.
- Obecne rekurzívne funkcie
  - Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií:
    - Ackermannova funkcia (1928),
    - univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie.
- Čiastočne rekurzívne funkcie
  - Kleeneho prvá veta o rekurzii (veta o pevnom bode).
  - Kleeneho veta o normálnej forme.
  - Churchova téza a algoritmicky nerozhodnuteľné problémy.

# Zopakovanie

## Primitívne rekurzívne funkcie (charakterizácia)

Trieda primitívne rekurzívnych funkcií je najmenšia trieda funkcií, ktorá obsahuje funkciu nasledovníka $\mathsf{S}(x) = x + 1$, funkciu predchodcu $x \dot{-} 1$ a je uzavretá na explicitné definície a regulárne rekurzívne definície s mierou.

## Obecne rekurzívne funkcie (definícia)

Trieda obecne rekurzívnych funkcií je najmenšia trieda funkcií, ktorá obsahuje funkciu nasledovníka $\mathsf{S}(x) = x + 1$, funkciu predchodcu $x \dot{-} 1$ a je uzavretá na explicitné definície a regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií.

## Obecne rekurzívne funkcie, ktoré nie sú primitívne rekurzívne

- Ackermannova funkcia (1928).
- Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie.

# Zopakovanie

## Čiastočné funkcie

$n$-árna čiastočná funkcia $f$ je jednoznačná relácia z $\mathrm{N}^n$ do $\mathrm{N}$:

$$(\vec{x}, y) \in f \wedge (\vec{x}, z) \in f \rightarrow y = z.$$

Čiastočné funkcie sú usporiadané množinovou reláciou $f \subseteq g$.

## Silná rovnosť (Kleene)

$\tau \simeq \rho$ platí, ak jedna z nasledujúcich podmienok je splnená:

- Výrazy $\tau, \rho$ sú definované a ich hodnoty sú rovnaké.
- Výrazy $\tau, \rho$ nie sú definované.

Ak termy $\tau, \rho$ obsahujú len funkcie, potom $\tau \simeq \rho \leftrightarrow \tau = \rho$.
Označenie:

- $\tau\downarrow$, ak výraz $\tau$ je definovaný (má hodnotu, konverguje).
- $\tau\uparrow$, ak výraz $\tau$ nie je definovaný (nemá hodnotu, diverguje).

# Zopakovanie

## Kleeneho prvá veta o rekurzii

*Funkcionálna rovnica v neznámej $f$:*

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \ldots, x_n]$$

*má najmenšie riešenie n-árnu čiastočnú funkciu $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$, ktorá je limitou reťazca $f_0, f_1, f_2, \ldots$ definovaného predpisom*

$$f_0 = \emptyset^{(n)}$$
$$f_{i+1}(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f_i; x_1, \ldots, x_n].$$

## Poznámka

Toto je prvá časť originálnej Kleeneho prvej vety o rekurzii. V druhej časti sa tvrdí, že najmenšie riešenie je vypočítateľné. To dokážeme na dnešnej prednáške.

# Rekurzívne definície

## Rekurzívne definície čiastočných funkcií

Sú to definície čiastočných funkcií v tvare

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \ldots, x_n].$$

Čiastočnou funkciou, ktorá je definovaná uvedeným vzťahom, rozumieme najmenšie riešenie tejto funkcionálnej rovnice v triede $n$-árnych čiastočných funkcií. Existencia takého riešenia plynie z prvej vety o rekurzii.

## Poznámka

Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tau[f; x_1, \ldots, x_n]$$

sú špeciálnym prípadom rekurzívnych definícií čiastočných funkcií. Tento fakt je to dôsledok nasledujúcich dvoch viet.

# Rekurzívne definície

## Veta

*Predpokladajme, že*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tau[f; x_1, \ldots, x_n]$$

*je regulárna rekurzívna definícia n-árnej funkcie $f$. Potom funkcionálna rovnica v triede n-árnych čiastočných funkcií*

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \ldots, x_n]$$

*je rekurzívna definícia tej istej funkcie $f$.*

# Rekurzívne definície

## Dôkaz.

Predpokladajme, že rekurzívna definícia je regulárna v dobre založenej relácie $\prec$. Nech $g$ je riešenie funkcionálnej rovnice

$$g(x_1,\ldots,x_n) \simeq \tau[g;x_1,\ldots,x_n]. \tag{1}$$

$\prec$-indukciou podľa $x_1,\ldots,x_n$ dokážeme tvrdenie

$$f(x_1,\ldots,x_n) \simeq g(x_1,\ldots,x_n).$$

V induktívnom kroku pre $x_1,\ldots,x_n$ dokážeme pomocné tvrdenie

$$\Gamma^\tau_\rho[f;x_1,\ldots,x_n] \to \rho[f;x_1,\ldots,x_n] \simeq \rho[g;x_1,\ldots,x_n] \tag{2}$$

pre každý podterm $\rho$ termu $\tau$ strážený podmienkou $\Gamma^\tau_\rho$ v $\tau$. Odtiaľ

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \tau[f;x_1,\ldots,x_n] \overset{(2)}{\simeq} \tau[g;x_1,\ldots,x_n] \overset{(1)}{\simeq} g(x_1,\ldots,x_n).$$

# Rekurzívne definície

## Veta

*Predpokladajme, že*

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \ldots, x_n]$$

*je rekurzívna definícia n-árnej čiastočnej funkcie* $f$*. Predpokladajme ďalej, že* $f$ *a všetky pomocné čiastočné funkcie v terme* $\tau$ *sú totálne. Potom funkcionálna rovnica v triede n-árnych funkcií*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tau[f; x_1, \ldots, x_n]$$

*je regulárna rekurzívna definícia tej istej funkcie* $f$*.*

# Rekurzívne definície

## Dôkaz.

Podľa prvej vety o rekurzii funkcia $f$ sa dá vyjadriť v tvare $f = \bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$, kde $f_0, f_1, f_2, \ldots$ je reťazec definovaný predpisom

$$f_0 = \emptyset^{(n)} \qquad\qquad f_{i+1}(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f_i; x_1, \ldots, x_n].$$

Definícia dobre založenej relácie $\prec$:

$$m(x_1, \ldots, x_n) = \text{najmenšie } i \text{ také, že } f_i(x_1, \ldots, x_n)\downarrow$$
$$(x_1, \ldots, x_n) \prec (y_1, \ldots, y_n) \leftrightarrow m(x_1, \ldots, x_n) < m(y_1, \ldots, y_n).$$

Potom funkcionálna rovnica

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tau[f; x_1, \ldots, x_n]$$

je regulárna rekurzívna definícia do dobre založenej relácie $\prec$. Jej (jediným) riešením je funkcia $f$.

# Výpočtový model

## Úvod

Uvažujme rekurzívnu definíciu $n$-árnej čiastočnej funkcie $f$ v tvare

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \ldots, x_n].$$

Chceme ukázať, že $f$ je vypočítateľná vo výpočtovom modeli, ktorý je založený na vyhodnocovaní výrazov.

## Označenie a predpoklady

- $g_1, \ldots, g_k$ sú všetky pomocné čiastočné funkcie v $\tau$.
- Každá nenulová konštanta $c$ v terme $\tau$ je nahradená odpovedajúcim monadickým numerálom:

$$\overbrace{\mathsf{S} \ldots \mathsf{S}}^{c\text{-krát}}(0).$$

# Výpočtový model

## Monadické numerály

Výpočet prebieha na monadických numeráloch:

$$0 \quad \mathsf{S}(0) \quad \mathsf{S}\,\mathsf{S}(0) \quad \mathsf{S}\,\mathsf{S}\,\mathsf{S}(0) \quad \mathsf{S}\,\mathsf{S}\,\mathsf{S}\,\mathsf{S}(0) \quad \ldots .$$

Označenie:

- Ak $x$ je prirodzené číslo, potom $\underline{x}$ je monadický numerál, ktorého hodnota je číslo $x$:

$$\underline{x} \equiv \overbrace{\mathsf{S} \ldots \mathsf{S}}^{x\text{-krát}}(0).$$

- Ak $x_1, \ldots, x_n$ sú prirodzené čísla, potom

$$\underline{x_1, \ldots, x_n} \equiv \underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n} \equiv \overbrace{\mathsf{S} \ldots \mathsf{S}}^{x_1\text{-krát}}(0), \ldots, \overbrace{\mathsf{S} \ldots \mathsf{S}}^{x_n\text{-krát}}(0).$$

# Výpočtový model

## Jeden krok výpočtu

Ak uzavretý rekurzívny term $\tau$ nie je numerál, tak musí obsahovať aspoň jeden podvýraz (*redex*) v tvare

$$\mathrm{D}(\underline{x}, \tau_2, \tau_3) \quad g_1(\underline{y_1}, \ldots, \underline{y_{m_1}}) \quad \ldots \quad g_k(\underline{y_1}, \ldots, \underline{y_{m_k}}) \quad f(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}).$$

Jeden výpočtový krok spočíva v nájdení najľavejšieho redexu a jeho nahradením kontrakciou podľa nasledujúcich pravidiel

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}(\underline{0}, \tau_2, \tau_3) &\rhd_1 \tau_3 \\
\mathrm{D}(\underline{x+1}, \tau_2, \tau_3) &\rhd_1 \tau_2 \\
g_i(\underline{y_1}, \ldots, \underline{y_{m_i}}) &\rhd_1 \underline{g_i(y_1, \ldots, y_{m_i})} \qquad\qquad \text{pre } i = 1, \ldots, k \\
f(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}) &\rhd_1 \tau[f; \underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}].
\end{aligned}$$

Tak dostaneme nový uzavretý rekurzívny term $\rho$ a píšeme

$$\tau \rhd_1 \rho.$$

# Výpočtový model

## Viac krokov výpočtu

Označenie:

- $\tau_1 \rhd_k \tau_2$, ak výraz $\tau_1$ sa redukuje do výrazu $\tau_2$ po $k$ krokoch. To znamená, že existujú uzavreté rekurzívne termy $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_k$ také, že
$$\tau_1 \equiv \rho_0 \rhd_1 \rho_1 \rhd_1 \cdots \rhd_1 \rho_k \equiv \tau_2.$$
Umožníme tiež prípad $k = 0$. Vtedy $\tau_1 \rhd_0 \tau_2 \leftrightarrow \tau_1 \equiv \tau_2$.
- $\tau_1 \rhd \tau_2$, ak $\tau_1 \rhd_k \tau_2$ pre nejaké $k$.

Platí

$$\tau \rhd \rho_1 \land \tau \rhd \rho_2 \to \rho_1 \rhd \rho_2 \lor \rho_2 \rhd \rho_1$$
$$\underline{y} \rhd \rho \leftrightarrow \rho \equiv \underline{y}.$$

Ak $\tau \rhd \underline{y}$, tak vravíme, že výpočet skončil s výsledkom $y$.

# Výpočtový model

## Lema (Korektnosť)

*Platí*

$$f(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}) \rhd \underline{y} \to f(x_1, \ldots, x_n) \simeq y.$$

## Dôkaz.

Indukciou podľa $k$ dokážeme, že pre každý uzavretý term $\rho$ platí

$$\rho \rhd_k \underline{y} \to \rho \simeq y. \tag{1}$$

Nech $f(\underline{\vec{x}}) \rhd \underline{y}$. Potom

$$f(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}) \rhd_1 \tau[f; \underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}] \rhd_k \underline{y}$$

pre nejaké číslo $k$. Odtiaľ

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \ldots, x_n] \overset{(1)}{\simeq} y.$$

# Výpočtový model

## Lema (Úplnosť)

*Platí*

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq y \to f(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}) \rhd \underline{y}.$$

## Dôkaz.

Podľa prvej vety o rekurzii čiastočná funkcia $f$ sa dá vyjadriť v tvare $f = \bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$, kde $f_0, f_1, f_2, \ldots$ je reťazec definovaný predpisom

$$f_0 = \emptyset^{(n)} \qquad\qquad f_{i+1}(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f_i; x_1, \ldots, x_n].$$

Indukciou podľa $i$ dokážeme, že platí

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) \simeq y \to f(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}) \rhd \underline{y}. \tag{1}$$

Odtiaľ dostaneme

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq y \Rightarrow \exists i\, f_i(x_1, \ldots, x_n) \simeq y \overset{(1)}{\Rightarrow} f(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}) \rhd \underline{y}.$$

# Výpočtový model

## Veta (Ekvivalentnosť výpočtovej a definičnej sémantiky)

*Platí*

$$f(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}) \rhd \underline{y} \leftrightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \simeq y.$$

## Dôkaz.

Priamy dôsledok predošlých dvoch pomocných tvrdení.

## Poznámka

Toto je druhá časť originálnej Kleeneho prvej vety o rekurzii.

# Čiastočne rekurzívne funkcie

## Definícia triedy čiastočne rekurzívnych funkcií

- Základné funkcie:
  - funkcia nasledovníka $\mathrm{S}(x) = x + 1$,
  - funkcia predchodcu $x \dot{-} 1$.
- Explicitné definície čiastočných funkcií:

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq \tau[x_1, \dots, x_n].$$

- Rekurzívne definície čiastočných funkcií:

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \dots, x_n].$$

Funkcia je rekurzívna, ak je to totálna čiastočne rekurzívna funkcia. Predikát je rekurzívny, ak taká je jeho charakteristická funkcia.

# Čiastočne rekurzívne funkcie

## Veta

*Trieda rekurzívnych funkcií je obecne rekurzívne uzavretá.*

## Dôsledok

- *Každá obecne rekurzívna funkcia je rekurzívna.*
- *Každý obecne rekurzívny predikát je rekurzívny.*
- *Trieda rekurzívnych funkcií je primitívne rekurzívne uzavretá.*
- *Rekurzívne predikáty sú uzavreté na explicitné definície predikátov s ohraničenými formulami.*
- *Rekurzívne funkcie sú uzavreté na definície funkcií ohraničenou minimalizáciou.*
- *Rekurzívne funkcie sú uzavreté na definície funkcií regulárnou minimalizáciou.*

# Čiastočne rekurzívne funkcie

## Primitívna rekurzia čiastočných funkcií

Sú to definície čiastočných funkcií v tvare

$$\begin{aligned} f(0, y_1, \ldots, y_n) &\simeq g(y_1, \ldots, y_n) \\ f(x+1, y_1, \ldots, y_n) &\simeq h\big(x, f(x, y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n\big). \end{aligned}$$

Primitívna rekurzia pre totálne $g, h$:

$$\begin{aligned} f(0, y_1, \ldots, y_n) &= g(y_1, \ldots, y_n) \\ f(x+1, y_1, \ldots, y_n) &= h\big(x, f(x, y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n\big) \end{aligned}$$

je špeciálny prípad operátora primitívnej rekurzie čiastočných funkcií.

# Čiastočne rekurzívne funkcie

## Veta

*Trieda čiastočne rekurzívnych funkcií je uzavretá na primitívnu rekurziu čiastočných funkcií.*

## Dôkaz.

Nech $g, h$ sú čiastočne rekurzívne funkcie a

$$\begin{aligned} f(0, y_1, \ldots, y_n) &\simeq g(y_1, \ldots, y_n) \\ f(x+1, y_1, \ldots, y_n) &\simeq h\big(x, f(x, y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n\big). \end{aligned}$$

Rekurzívnosť čiastočnej funkcie $f$ plynie z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned} f(x, y_1, \ldots, y_n) \simeq\ & \textbf{if } x \neq 0 \textbf{ then} \\ & \quad h\big(x \dot{-} 1, f(x \dot{-} 1, y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n\big) \\ & \textbf{else} \\ & \quad g(y_1, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

# Čiastočne rekurzívne funkcie

## Neohraničená minimalizácia

Sú to definície čiastočných funkcií v tvare

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \text{najmenšie číslo } y \text{ také, že platí } \varphi[x_1, \ldots, x_n, y],$$

kde $\varphi$ je ohraničená formula. Skrátený zápis:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mu y \big[\varphi[x_1, \ldots, x_n, y]\big].$$

Regulárna minimalizácia:

$$f(\vec{x}) = \mu y \big[\varphi[\vec{x}, y]\big] \qquad\qquad \text{ak } \forall \vec{x} \exists y \varphi[\vec{x}, y],$$

je špeciálny prípad neohraničenej minimalizácie.

## Veta

*Trieda čiastočných rekurzívnych funkcií je uzavretá na definície čiastočných funkcií neohraničenou minimalizáciou.*

## Čiastočne rekurzívne funkcie

### Neohraničená minimalizácia

Sú to definície čiastočných funkcií v tvare

$$f(x_1,\ldots,x_n) \simeq y \leftrightarrow \varphi[x_1,\ldots,x_n,y] \wedge \forall z < y\, \neg\varphi[x_1,\ldots,x_n,z],$$

kde $\varphi$ je ohraničená formula. Skrátený zápis:

$$f(x_1,\ldots,x_n) \simeq \mu y\left[\varphi[x_1,\ldots,x_n,y]\right].$$

Regulárna minimalizácia:

$$f(\vec{x}) = \mu y\left[\varphi[\vec{x},y]\right] \qquad\qquad \text{ak } \forall\vec{x}\exists y\varphi[\vec{x},y],$$

je špeciálny prípad neohraničenej minimalizácie.

### Veta

*Trieda čiastočných rekurzívnych funkcií je uzavretá na definície čiastočných funkcií neohraničenou minimalizáciou.*

# Čiastočne rekurzívne funkcie

## Dôkaz.

V odvodení $f$ použijeme túto čiastočne rekurzívnu funkciu:

$$g(y, \vec{x}) \simeq \begin{cases} y & \text{ak platí } \varphi[\vec{x}, y], \\ g(y+1, \vec{x}) & \text{ak neplatí } \varphi[\vec{x}, y]. \end{cases}$$

Rekurzívnosť čiastočnej funkcie $f$ plynie z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned} P(\vec{x}, y) &\leftrightarrow \varphi[\vec{x}, y] \\ g(y, \vec{x}) &\simeq \textbf{if } P(\vec{x}, y) \textbf{ then } y \textbf{ else } g(y+1, \vec{x}) \\ f(\vec{x}) &\simeq g(0, \vec{x}). \end{aligned}$$

Korektnosť implementácie plynie z tejto vlastnosti čiastočne rekurzívnej funkcie $g$:

$$g(y, \vec{x}) \simeq z \leftrightarrow y \leq z \wedge \varphi[\vec{x}, z] \wedge \forall z_1 \big(y \leq z_1 < z \rightarrow \neg\varphi[\vec{x}, z_1]\big).$$

# Čiastočne rekurzívne funkcie

## Minimalizácia čiastočných funkcií

Sú to definície čiastočných funkcií v tvare

$$f(\vec{x}) \simeq y \leftrightarrow g(y, \vec{x}) \simeq 1 \land \forall z < y \big(g(z, \vec{x})\downarrow \land g(z, \vec{x}) \not\simeq 1\big).$$

Skrátený zápis

$$f(\vec{x}) \simeq \mu y[g(y, \vec{x}) \simeq 1].$$

Neohraničená minimalizácia pre totálne $g$:

$$f(\vec{x}) \simeq \mu y[g(y, \vec{x}) = 1].$$

je špeciálny prípad operátora minimalizácie čiastočných funkcií.

## Veta

*Trieda čiastočne rekurzívnych funkcií je uzavretá na minimalizáciu čiastočných funkcií.*

# Čiastočne rekurzívne funkcie

## Minimalizácia čiastočných funkcií

Sú to definície čiastočných funkcií v tvare

$$f(\vec{x}) \simeq y \leftrightarrow g(y, \vec{x}) \simeq 1 \wedge \forall z < y \exists v \big(g(z, \vec{x}) \simeq v \wedge v \neq 1\big).$$

Skrátený zápis

$$f(\vec{x}) \simeq \mu y[g(y, \vec{x}) \simeq 1].$$

Neohraničená minimalizácia pre totálne $g$:

$$f(\vec{x}) \simeq \mu y[g(y, \vec{x}) = 1].$$

je špeciálny prípad operátora minimalizácie čiastočných funkcií.

## Veta

*Trieda čiastočne rekurzívnych funkcií je uzavretá na minimalizáciu čiastočných funkcií.*

# Čiastočne rekurzívne funkcie

## Dôkaz.

Nech $g$ je čiastočne rekurzívna funkcia a

$$f(\vec{x}) \simeq \mu y[g(y,\vec{x}) \simeq 1].$$

Rekurzívnosť čiastočnej funkcie $f$ plynie z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned} h(y,\vec{x}) &\simeq \textbf{if } \big(g(y,\vec{x}) =_* 1\big) \neq 0 \textbf{ then } y \textbf{ else } h(y+1,\vec{x}) \\ f(\vec{x}) &\simeq h(0,\vec{x}). \end{aligned}$$

Korektnosť implementácie plynie z tejto vlastnosti čiastočne rekurzívnej funkcie $h$:

$$\begin{aligned} h(y,\vec{x}) \simeq z \leftrightarrow y \leq z \land g(z,\vec{x}) \simeq 1 \land \\ \forall z_1\big(y \leq z_1 < z \rightarrow g(z_1,\vec{x})\!\downarrow \land\, g(z_1,\vec{x}) \not\simeq 1\big). \end{aligned}$$

# Kleeneho veta o normálnej forme

## Veta o normálnej forme (Kleene)

*Existuje unárna primitívne rekurzívna funkcia* $\mathrm{U}$ *a pre každé* $n \geq 1$ *existuje* $(n+2)$*-árny primitívne rekurzívny predikát* $T_n$ *taký, že pre každú* $n$*-árnu čiastočne rekurzívnu funkciu* $f$ *existuje číslo* $e$ *také, že pre všetky čísla* $x_1, \ldots, x_n$ *platí vzťah*

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mathrm{U}\, \mu s[\mathrm{T}_n(e, x_1, \ldots, x_n, s)].$$

## Poznámka

Ak čiastočne rekurzívna funkcia $f$ je totálna, potom minimalizácia vo výraze na pravej strane rovnosti je regulárna, t.j.

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists s\, \mathrm{T}_n(e, x_1, \ldots, x_n, s).$$

V takomto prípade platí takýto vzťah

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{U}\, \mu s[\mathrm{T}_n(e, x_1, \ldots, x_n, s)].$$

# Kleeneho veta o normálnej forme

## Idea dôkazu

Neformálny popis predikátu $\mathrm{T}_n$ a funkcie $\mathrm{U}$:

- Kleeneho predikát $\mathrm{T}_n$ má túto základnú vlastnosť:

  > $\mathrm{T}_n(e, x_1, \dots, x_n, s)$ *platí práve vtedy, keď číslo $e$ je kód nejakého programu a číslo $s$ je kód výpočtu tohoto programu pre vstupy $x_1, \dots, x_n$.*

  Tu programom rozumieme čiastočne rekurzívne odvodenie nejakej čiastočnej rekurzívnej funkcie a výpočtom proces vyhodnotenia tejto čiastočnej funkcie.
- Funkcia $\mathrm{U}(s)$ určí z kódu výpočtovej postupnosti výslednú hodnotu.

Dá sa ukázať, že Kleeneho predikát $\mathrm{T}_n$ i funkciu $\mathrm{U}$ môžeme zvoliť ako primitívne rekurzívne.

# Kleeneho veta o normálnej forme

## Veta

*Každá rekurzívna funkcia je obecne rekurzívna.*

## Dôkaz.

Ak $f$ je $n$-árna rekurzívna funkcia, potom existuje číslo $e$ také, že že pre všetky čísla $x_1, \ldots, x_n$ platí vzťah

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{U}\,\mu s[\mathrm{T}_n(e, x_1, \ldots, x_n, s)].$$

Minimalizácia vo výraze na pravej strane rovnosti je regulárna:

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists s\, \mathrm{T}_n(e, x_1, \ldots, x_n, s).$$

Obecná rekurzívnosť funkcie $f$ plynie z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned} g(x_1, \ldots, x_n) &= \mu s[\mathrm{T}_n(e, x_1, \ldots, x_n, s)] \\ f(x_1, \ldots, x_n) &= \mathrm{U}\, g(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

# Čiastočne μ-rekurzívne funkcie

## Definícia triedy čiastočne μ-rekurzívnych funkcií

- Základné funkcie:
  - konštantná funkcia $\mathrm{Z}(x) = 0$,
  - funkcia nasledovníka $\mathrm{S}(x) = x + 1$,
  - identity (projekcie) $\mathrm{I}_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ pre každé $1 \leq i \leq n$.
- Kompozícia (skladanie) čiastočných funkcií:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq h\big(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)\big).$$

- Primitívna rekurzia čiastočných funkcií:

$$\begin{aligned} f(0, y_1, \ldots, y_n) &\simeq g(y_1, \ldots, y_n) \\ f\big(\mathrm{S}(x), y_1, \ldots, y_n\big) &\simeq h\big(x, f(x, y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n\big). \end{aligned}$$

- Minimalizácia čiastočných funkcií:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mu y[g(y, x_1, \ldots, x_n) \simeq 1].$$

# Čiastočne μ-rekurzívne funkcie

### Definícia
Predikát je μ-rekurzívny, ak taká je jeho charakteristická funkcia.

### Veta
*Trieda μ-rekurzívnych funkcií je primitívne rekurzívne uzavretá.*

### Dôsledok
- *Každá primitívne rekurzívna funkcia je μ-rekurzívna.*
- *Každý primitívne rekurzívny predikát je μ-rekurzívny.*

# Čiastočne μ-rekurzívne funkcie

### Veta

*Trieda čiastočne rekurzívnych funkcií je totožná s triedou čiastočne μ-rekurzívnych funkcií.*

### Dôkaz.

Ak $f$ je $n$-árna čiastočne rekurzívna funkcia, potom existuje číslo $e$ také, že pre všetky čísla $x_1, \ldots, x_n$ platí vzťah:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mathrm{U}\, \mu s[\mathrm{T}_n(e, x_1, \ldots, x_n, s)].$$

μ-rekurzívnosť čiastočnej funkcie $f$ plynie z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned} P(s, x_1, \ldots, x_n) &\leftrightarrow \mathrm{T}_n(e, x_1, \ldots, x_n, s) \\ g(x_1, \ldots, x_n) &\simeq \mu s[P_*(s, x_1, \ldots, x_n) \simeq 1] \\ f(x_1, \ldots, x_n) &\simeq \mathrm{U}\, g(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Opačná inklúzia platí očividne.

# Church-Turingova téza

## Churchova téza (1936)

*Trieda intuitívne vypočítateľných funkcií nad oborom $\mathbb{N}$ je totožná s triedou obecne rekurzívnych funkcií.*

## Turingova téza (1936-7)

*Trieda intuitívne vypočítateľných funkcií nad oborom $\mathbb{N}$ je totožná s triedou funkcií vypočítateľných na Turingových strojoch.*

## Modely (čiastočne) vypočítateľných funkcií

- obecne rekurzívne funkcie [Herbrand-Gödel, 1931, 1934],
- $\lambda$-definovateľné funkcie [Church, 1932],
- (čiastočne) $\mu$-rekurzívne funkcie [Kleene, 1935, 1952],
- Turingove stroje [Turing, 1936-7],
- čiastočne rekurzívne funkcie [Kleene, 1952],
- registrové stroje [napr. Minsky, 1961].

# Záver

## 10. cvičenie

- Výsledky testu s komentárom nájdete na webe.

## 12. prednáška

- Enumeračná čiastočná funkcia (univerzálna čiastočná funkcia pre čiastočne rekurzívne funkcie).
- Rekurzívne rozhodnuteľné, polorozhodnuteľné a nerozhodnuteľné problémy