1-AIN-625 Úvod do matematickej logiky pre programátorov
1-INF-450 Logika pre informatikov

Zimný semester 2012/13
8. prednáška

Ján Komara

Obsah 8. prednášky

Zopakovanie

Cieľ predmetu

- Vybudovať matematické základy deklaratívnych programovacích jazykov.

Stručná osnova predmetu

- Primitívne rekurzívne funkcie
  - Aritmetizácia dátových štruktúr (Gödelizácia).
  - Regulárne rekurzívne definície s mierou.
- Obecne rekurzívne funkcie
  - Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií:
    - Ackermannova funkcia (1928),
    - univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie.
- Čiastočne rekurzívne funkcie
  - Kleeneho prvá veta o rekurzii (veta o pevnom bode).
  - Kleeneho veta o normálnej forme.
  - Churchova téza a algoritmicky nerozhodnuteľné problémy.

Zopakovanie

Syntaktická forma rekurzie s mierou $\mu[\vec{x}]$

Sú to definície v tvare

$$f(\vec{x}) = \tau\big[[f]^{\mu}_{\vec{x}}; \vec{x}\big]. \tag{1}$$

Term na pravej strane rovnosti vznikol s termu $\tau[f; \vec{x}]$ nahradením každej rekurzívnej aplikácie $f(\vec{\rho})$ výrazom

$$[f]_{\vec{x}}(\vec{\rho}) \equiv \textbf{if } \mu[\vec{\rho}] < \mu[\vec{x}] \textbf{ then } f(\vec{\rho}) \textbf{ else } 0.$$

Každá rekurzívna aplikácia $f(\vec{\rho})$ v (1) je teda strážená podmienkou $\mu[\vec{\rho}] < \mu[\vec{x}]$.

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na rekurziu s mierou.

Zopakovanie

Regulárna rekurzia s mierou $\mu[\vec{x}]$

Sú to definície v tvare

$$f(\vec{x}) = \tau[f; \vec{x}], \tag{1}$$

pre ktoré sú splnené podmienky regularity. Tie majú tvar:

$$\Gamma^{\tau}_{f(\vec{\rho})}[f; \vec{x}] \rightarrow \mu\big[\vec{\rho}[f; \vec{x}]\big] < \mu[\vec{x}]$$

pre každú rek. aplikáciu $f(\vec{\rho})$ stráženú podmienkou $\Gamma^{\tau}_{f(\vec{\rho})}$ v τ.
Splnenie podmienok sa overuje pre funkciu definovanú rovnosťou:

$$f(\vec{x}) = \tau\big[[f]^{\mu}_{\vec{x}}; \vec{x}\big].$$

Táto funkcia je potom jediným riešením funkcionálnej rovnice (1).

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na regulárnu rekurziu s mierou.

Veta

Trieda primitívne rekurzívnych funkcií je najmenšia trieda funkcií, ktorá obsahuje funkciu nasledovníka $\mathrm{S}(x) = x + 1$*, funkciu predchodcu* $x \dot{-} 1$ *a je uzavretá na explicitné definície a regulárnu rekurziu s mierou.*

Ackermannova funkcia

Ackermannova funkcia (1928)

Postupnosť binárnych p.r. funkcií A_x $(x = 0, 1, 2, \ldots)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_0(y,z) &= y + z \\ \mathrm{A}_1(y,z) &= y \cdot z \\ \mathrm{A}_2(y,z) &= y^z. \end{aligned}$$

Definícia $\lambda xyz.\,\mathrm{A}_x(y,z)$ pomocou vnorenej dvojitej rekurzie

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_0(y,z) &= y + z \\ \mathrm{A}_{x+1}(y,0) &= (x =_* 1) + (x \geq_* 2) \cdot y \\ \mathrm{A}_{x+1}(y,z+1) &= \mathrm{A}_x\big(y, \mathrm{A}_{x+1}(y,z)\big). \end{aligned}$$

Táto funkcia nie je primitívne rekurzívna, pretože jej diagonalizácia $\lambda x.\,\mathrm{A}_x(x,x)$ rastie rýchlejšie ako každá unárna p.r. funkcia.

Ackermannova funkcia

Ackermann-Péterovej funkcia

Definícia pomocou vnorenej dvojitej rekurzie

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}(0, y) &= y + 1 \\
\mathrm{A}(x+1, 0) &= \mathrm{A}(x, 1) \\
\mathrm{A}(x+1, y+1) &= \mathrm{A}\big(x, \mathrm{A}(x+1, y)\big).
\end{aligned}
$$

Napríklad:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}(1, y) &= y + 2 \\
\mathrm{A}(2, y) &= 2 \cdot y + 3 = 2 \cdot (y + 3) \dot{-} 3 \\
\mathrm{A}(3, y) &= 8 \cdot 2^{y} \dot{-} 3 = 2^{y+3} \dot{-} 3.
\end{aligned}
$$

Funkcia nie je primitívne rekurzívna, pretože jej diagonalizácia $\lambda x.\, \mathrm{A}(x, x)$ rastie rýchlejšie ako každá unárna p.r. funkcia

Ackermannova funkcia

Podmienky regularity pre Ackermann-Péterovej funkciu

Lexikografické usporiadanie dvojíc prirodzených čísel

$$(a, b) <_{\mathrm{lex}} (c, d) \leftrightarrow a < c \vee a = c \wedge b < d.$$

Je to dobré usporiadanie: každá klesajúca postupnosť je konečná

$$(a_1, b_1) >_{\mathrm{lex}} (a_2, b_2) >_{\mathrm{lex}} (a_3, b_3) >_{\mathrm{lex}} (a_4, b_4) >_{\mathrm{lex}} \cdots .$$

Podmienky regularity pre funkciu $\mathrm{A}(x, y)$ sú triviálne splnené:

$$\begin{aligned} (x, 1) &<_{\mathrm{lex}} (x+1, 0) \\ (x+1, y) &<_{\mathrm{lex}} (x+1, y+1) \\ \big(x, \mathrm{A}(x+1, y)\big) &<_{\mathrm{lex}} (x+1, y+1). \end{aligned}$$

Definícia transfinitnou rekurziou do dobrého usporiadania $<_{\mathrm{lex}}$.

Ackermannova funkcia

Graf Ackermann-Péterovej funkcie

Funkcia $\mathrm{A}(x, y)$ nie je primitívne rekurzívna, ale jej graf

$$G(x, y, z) \leftrightarrow \mathrm{A}(x, y) = z$$

je primitívne rekurzívny predikát.
Idea dôkazu: vyjadriť graf v tvare

$$G(x, y, z) \leftrightarrow \exists s \leq b(z) \left(Cvs(s) \land \langle x, y, z \rangle \ \varepsilon \ s \right),$$

kde

- $Cvs(s)$ je p.r. predikát, ktorý platí, ak s je postupnosť histórie výpočtu Ackermann-Péterovej funkcie;
- $b(z)$ je p.r. funkcia, ktorá dáva odhad na veľkosť takejto postupnosti pre výsledok výpočtu z.

Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie

Špecifikácia interpretra

Interpreter programovacieho jazyka p.r. odvodení je binárna funkcia $e \bullet x$, ktorá má tieto dve základné vlastnosti:

- Pre každý n-árny p.r. funkčný symbol f a n-ticu čísel $x_1, \ldots, x_n$ platí rovnosť:

  $$\ulcorner f \urcorner \bullet \langle x_1, \ldots, x_n \rangle = f^{\mathcal{N}}(x_1, \ldots, x_n).$$

  Tu $\ulcorner f \urcorner \in \mathrm{N}$ je kód a $f^{\mathcal{N}} : \mathrm{N}^n \to \mathrm{N}$ interpretácia symbolu f.
- Pre každé číslo e, unárna funkcia f definovaná vzťahom

  $$f(x) = e \bullet x$$

  je primitívne rekurzívna funkcia.

Primitívne rekurzívne odvodenia sú reprezentované p.r. funkčnými symbolmi.

Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie

Implementácia interpretra

Definícia interpretra pomocou vnorenej dvojitej rekurzie:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Z} \bullet x &= 0 \\
\boldsymbol{S} \bullet x &= x + 1 \\
\boldsymbol{I}_i^n \bullet x &= [x]_i^n \\
\boldsymbol{\langle} g, gs \boldsymbol{\rangle} \bullet x &= \big\langle g \bullet x, gs \bullet x \big\rangle \\
\boldsymbol{Comp}_m^n(h, gs) \bullet x &= h \bullet (gs \bullet x) \\
\boldsymbol{Rec}_n(g, h) \bullet \langle 0, y \rangle &= g \bullet y \\
\boldsymbol{Rec}_n(g, h) \bullet \langle x + 1, y \rangle &= h \bullet \big\langle x, \boldsymbol{Rec}_n(g, h) \bullet \langle x, y \rangle, y \big\rangle.
\end{aligned}
$$

Podmienky regularity pre funkciu $e \bullet x$ sú triviálne splnené, napr.

$$
\begin{aligned}
\big(\boldsymbol{Rec}_n(g, h), \langle x, y \rangle\big) &<_{\mathrm{lex}} \big(\boldsymbol{Rec}_n(g, h), \langle x + 1, y \rangle\big) \\
\big(h, \big\langle x, \boldsymbol{Rec}_n(g, h) \bullet \langle x, y \rangle, y \big\rangle\big) &<_{\mathrm{lex}} \big(\boldsymbol{Rec}_n(g, h), \langle x + 1, y \rangle\big).
\end{aligned}
$$

Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie

Definícia univerzálnej funkcie

Vravíme, že $(n+1)$-árna funkcia U_n je univerzálnou pre triedu n-árnych p.r. funkcií, ak sú splnené tieto podmienky:

- Pre každú n-árnu p.r. funkciu f existuje číslo e také, že pre každú n-ticu čísel $x_1, \ldots, x_n$ platí rovnosť

$$U_n(e, x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

- Pre každé číslo e je n-árna funkcia f definovaná vzťahom

$$f(x_1, \ldots, x_n) = U_n(e, x_1, \ldots, x_n)$$

  primitívne rekurzívna.

Funkciu U_n definujeme predpisom

$$U_n(e, x_1, \ldots, x_n) = e \bullet \langle x_1, \ldots, x_n \rangle.$$

Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie

Univerzálna funkcia U_1 nie je primitívne rekurzívna

Dôkaz sporom: predpokladajme, že funkcia U_1 je primitívne rekurzívna. Potom aj binárna funkcia f definovaná vzťahom

$$f(x) = U_1(x, x) + 1 \tag{1}$$

je primitívne rekurzívna. Existuje teda číslo e také, že pre každé číslo x platí rovnosť

$$U_1(e, x) = f(x). \tag{2}$$

Postupnými úpravami teraz dostaneme

$$f(e) \stackrel{(1)}{=} U_1(e, e) + 1 \stackrel{(2)}{=} f(e) + 1.$$

Spor.

Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie

Univerzálna funkcia U_n nie je primitívne rekurzívna

Dôkaz sporom: predpokladajme, že funkcia U_n je primitívne rekurzívna. Potom aj n-árna funkcia f definovaná vzťahom

$$f(x_1, \ldots, x_n) = U_n(x_1, x_1, \ldots, x_n) + 1 \tag{1}$$

je primitívne rekurzívna. Existuje teda číslo e také, že pre každdú n-ticu čísel $x_1, \ldots, x_n$ platí rovnosť

$$U_n(e, x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n). \tag{2}$$

Postupnými úpravami teraz dostaneme

$$f(e, \ldots, e) \stackrel{(1)}{=} U_n(e, e, \ldots, e) + 1 \stackrel{(2)}{=} f(e, \ldots, e) + 1.$$

Spor.

Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie

Graf univerzálnej funkcie U_1 nie je primitívne rekurzívny

Dôkaz sporom: predpokladajme, že graf univerzálnej funkcie

$$G_1(e, x, y) \leftrightarrow U_1(e, x) = y \tag{1}$$

je p.r. predikát. Potom je primitívne rekurzívny aj unárny predikát

$$P(x) \leftrightarrow G_1(x, x, 0). \tag{2}$$

Existuje teda číslo e také, že pre každé číslo x platí rovnosť

$$U_1(e, x) = P_*(x). \tag{3}$$

Postupnými úpravami teraz dostaneme spor:

$$P(e) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} G_1(e, e, 0) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} U_1(e, e) = 0 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} P_*(e) = 0 \Leftrightarrow \neg P(e).$$

Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie

Graf univerzálnej funkcie U_n nie je primitívne rekurzívny

Dôkaz sporom: predpokladajme, že graf univerzálnej funkcie

$$G_n(e, x_1, \ldots, x_n, y) \leftrightarrow U_n(e, x_1, \ldots, x_n) = y \tag{1}$$

je p.r. predikát. Potom je primitívne rekurzívny aj n-árny predikát

$$P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow G_n(x_1, x_1, \ldots, x_n, 0). \tag{2}$$

Existuje teda číslo e také, že pre každú n-ticu čísel $x_1, \ldots, x_n$ platí

$$U_n(e, x_1, \ldots, x_n) = P_*(x_1, \ldots, x_n). \tag{3}$$

Postupnými úpravami teraz dostaneme spor:

$$P(e, \ldots, e) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} G_n(e, e, \ldots, e, 0) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} U_n(e, e, \ldots, e) = 0 \overset{(3)}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow P_*(e, \ldots, e) = 0 \Leftrightarrow \neg P(e, \ldots, e).$$

Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií

Dobre založené relácie

Vravíme, že relácia $\vec{x} \prec \vec{y}$ na N^n je dobre založená (tiež noetheriánska), ak každá klesajúca postupnosť

$$\vec{x}_1 \succ \vec{x}_2 \succ \vec{x}_3 \succ \vec{x}_4 \succ \cdots$$

je konečná. Tu $\vec{x} \succ \vec{y} \leftrightarrow \vec{y} \prec \vec{x}$.
Úplné dobre založené usporiadanie sa nazýva dobré usporiadanie.

Príklady

- Relácia $\vec{x} \prec \vec{y}$ indukovaná mierou $\mu[\vec{x}]$ do štandardného usporiadania prirodzených čísel:

$$\vec{x} \prec \vec{y} \leftrightarrow \mu[\vec{x}] < \mu[\vec{y}].$$

- Lexikografické usporiadanie dvojíc prirodzených čísel:

$$(a, b) <_{\mathrm{lex}} (c, d) \leftrightarrow a < c \vee a = c \wedge b < d.$$

Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií

Syntaktická forma rekurzie do dobre založenej relácie $\prec$

Sú to definície v tvare

$$f(\vec{x}) = \tau\left[[f]^{\prec}_{\vec{x}}; \vec{x}\right]. \qquad (1)$$

Term na pravej strane rovnosti vznikol s termu $\tau[f; \vec{x}]$ nahradením každej rekurzívnej aplikácie $f(\vec{\rho})$ výrazom

$$[f]^{\prec}_{x}(\vec{\rho}) \equiv \textbf{if } \vec{\rho} \prec \vec{x} \textbf{ then } f(\vec{\rho}) \textbf{ else } 0.$$

Každá rekurzívna aplikácia $f(\vec{\rho})$ v (1) je teda strážená podmienkou $\vec{\rho} \prec \vec{x}$.

Veta

Funkcionálna rovnica (1) *má práve jedno riešenie.*

Dôkaz

Riešiteľnosť funkcionálnej rovnice vyplýva z Kleeneho vety o pevnom bode (10. prednáška).

Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií

Regulárna rekurzia do dobre založenej relácie $\prec$

Sú to definície v tvare

$$f(\vec{x}) = \tau[f;\vec{x}], \tag{1}$$

pre ktoré sú splnené podmienky regularity.
Podmienky regularity majú tvar:

$$\Gamma^{\tau}_{f(\vec{\rho})}[f;\vec{x}] \rightarrow \vec{\rho}[f;\vec{x}] \prec \vec{x}$$

pre každú rekurzívnu aplikáciu $f(\vec{\rho})$ funkcie f, ktorá je strážená podmienkou $\Gamma^{\tau}_{f(\vec{\rho})}$ v terme τ.
Splnenie podmienok pre funkciu definovanou pridruženou rovnosťou

$$f(\vec{x}) = \tau\left[[f]^{\prec}_{\vec{x}};\vec{x}\right].$$

Táto funkcia je potom jediným riešením funkcionálnej rovnice (1).

Obecne rekurzívne funkcie

Definícia triedy obecne rekurzívnych funkcií

- Základné funkcie:
  - funkcia nasledovníka $\mathrm{S}(x) = x + 1$,
  - funkcia predchodcu $x \dot{-} 1$.
- Explicitné definície:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tau[x_1, \ldots, x_n].$$

- Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tau[f; x_1, \ldots, x_n].$$

Predikát je obecne rekurzívny, ak taká je jeho charakteristická funkcia.

Obecne rekurzívne funkcie

Príklady obecne rekurzívnych funkcií

- Ackermannova funkcia.
- Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie.

Ani jedna z týchto funkcií nie je primitívne rekurzívna.

Veta

Trieda obecne rekurzívnych funkcií je primitívne rekurzívne uzavretá.

Dôsledok

- *Každá primitívne rekurzívna funkcia je obecne rekurzívna.*
- *Každý primitívne rekurzívny predikát je obecne rekurzívny.*
- *Obecne rekurzívne predikáty sú uzavreté na explicitné definície predikátov s ohraničenými formulami.*

Obecne rekurzívne funkcie

Dôkaz vety

- Funkcia nasledovníka S je základná obecne rekurzívna funkcia.
- Obecná rekurzívnosť Z plynie z tohoto vyjadrenia $\mathrm{Z}(x) = 0$.
- Obecná rekurzívnosť I_i^n plynie z vyjadrenia $\mathrm{I}_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$.
- Obecne rekurzívne funkcie sú uzavreté na kompozíciu funkcií:

  $$f(x_1, \ldots, x_n) = h\big(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)\big).$$

  Je to totiž špeciálny prípad explicitnej definície.
- Obecne rekurzívne funkcie sú uzavreté na primitívnu rekurziu:

  $$f(0, \vec{y}) = g(\vec{y}) \qquad f(x+1, \vec{y}) = h\big(x, f(x, \vec{y}), \vec{y}\big).$$

  Je to špeciálny prípad regulárnej rekurzie

  $$f(x, \vec{y}) = \mathbf{if}\ x \neq 0\ \mathbf{then}\ h\big(x \dot{-} 1, f(x \dot{-} 1, \vec{y}), \vec{y}\big)\ \mathbf{else}\ g(\vec{y})$$

  do dobre založenej relácie $(x_1, \vec{y}_1) \prec (x_2, \vec{y}_2) \leftrightarrow x_1 < x_2$.

Obecne rekurzívne funkcie

Regulárna minimalizácia

Sú to definície funkcií v tvare

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \text{najmenšie číslo } y \text{ také, že platí } \varphi[x_1, \ldots, x_n, y],$$

kde φ je ohraničená formula spĺňajúca podmienku regularity

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y \varphi[x_1, \ldots, x_n, y].$$

Skrátený zápis

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y \left[\varphi[x_1, \ldots, x_n, y]\right].$$

Veta

Trieda obecne rekurzívnych funkcií je uzavretá na definície funkcií regulárnou minimalizáciou.

Obecne rekurzívne funkcie

Dôkaz.

Uvažujme regulárnu minimalizáciu v tvare

$$f(\vec{x}) = \mu y \left[\varphi[\vec{x}, y]\right].$$

Obecná rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia:

$$g(y, \vec{x}) = \begin{cases} y & \text{ak } \exists z \leq y \, \varphi[\vec{x}, z], \text{ t.j. } y \geq f(\vec{x}); \\ g(y+1, \vec{x}) & \text{ak } \forall z \leq y \, \neg\varphi[\vec{x}, z], \text{ t.j. } y < f(\vec{x}). \end{cases}$$

$$f(\vec{x}) = g(0, \vec{x}).$$

Obecne rekurzívna funkcia $g(y, \vec{x})$ je definovaná regulárnou rekurziou do dobrého usporiadania

$$(y_1, \vec{x}_1) \prec (y_2, \vec{x}_2) \leftrightarrow f(\vec{x}_1) \dot{-} y_1 < f(\vec{x}_2) \dot{-} y_2.$$

Je to (nepredikatívna) spätná rekurzia s hornou závorou $f(\vec{x})$.

Obecne rekurzívne funkcie

Veta

Funkcia je obecne rekurzívna práve vtedy, keď jej graf je obecne rekurzívny predikát.

Dôkaz.

Nech $G(\vec{x}, y)$ je graf funkcie $f(\vec{x})$. Platí:

$$G(\vec{x}, y) \leftrightarrow f(\vec{x}) = y$$
$$f(\vec{x}) = \mu y\big[G(\vec{x}, y)\big].$$

Veta je tak jednoduchý dôsledok predošlých tvrdení.

μ-rekurzívne funkcie

Definícia triedy μ-rekurzívnych funkcií

- Základné funkcie:
  - konštantná funkcia $\mathrm{Z}(x) = 0$,
  - funkcia nasledovníka $\mathrm{S}(x) = x + 1$,
  - identity (projekcie) $\mathrm{I}_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ pre každé $1 \leq i \leq n$.
- Kompozícia (skladanie) funkcií:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = h\big(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)\big).$$

- Primitívna rekurzia:

$$\begin{aligned} f(0, y_1, \ldots, y_n) &= g(y_1, \ldots, y_n) \\ f\big(\mathrm{S}(x), y_1, \ldots, y_n\big) &= h\big(x, f(x, y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n\big). \end{aligned}$$

- Regulárna minimalizácia:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y[g(y, x_1, \ldots, x_n) = 1].$$

μ-rekurzívne funkcie

Definícia

Predikát je μ-rekurzívny, ak taká je jeho charakteristická funkcia.

Veta

Trieda μ-rekurzívnych funkcií je primitívne rekurzívne uzavretá.

Dôsledok

- *Každá primitívne rekurzívna funkcia je μ-rekurzívna.*
- *Každý primitívne rekurzívny predikát je μ-rekurzívny.*
- *μ-rekurzívne funkcie sú uzavreté na explicitné definície.*
- *μ-rekurzívne predikáty sú uzavreté na explicitné definície predikátov s ohraničenými formulami.*
- *μ-rekurzívne funkcie sú uzavreté na vnorenú jednoduchú rekurziu.*

μ-rekurzívne funkcie

Veta

Trieda μ-rekurzívnych funkcií je uzavretá na definície funkcií regulárnou minimalizáciou.

Dôkaz.

Uvažujme regulárnu minimalizáciu v tvare

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y \left[\varphi[x_1, \ldots, x_n, y]\right].$$

μ-rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia:

$$\begin{aligned} P(y, x_1, \ldots, x_n) &\leftrightarrow \varphi[x_1, \ldots, x_n, y] \\ f(x_1, \ldots, x_n) &= \mu y[P_*(y, x_1, \ldots, x_n) = 1]. \end{aligned}$$

μ-rekurzívne funkcie

Veta

Trieda μ-rekurzívnych funkcií je uzavretá na regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií.

Dôkaz

Regulárna rekurzia do dobre založenej relácie $\prec$:

$$f(\vec{x}) = \tau[f; \vec{x}].$$

Špecifikácia μ-rekurzívnej aproximačnej funkcie:

$$\forall \vec{x} \exists z\, f^{+}(z, \vec{x}+1) = f(\vec{x}) + 1$$
$$z_1 \leq z_2 \wedge f^{+}(z_1, \vec{x}+1) = y + 1 \rightarrow f^{+}(z_2, \vec{x}+1) = y + 1.$$

μ-rekurzívnosť funkcie f plynie potom z tohoto vyjadrenia:

$$d(\vec{x}) = \mu z[f^{+}(z, \vec{x}+1) \neq 0] \qquad f(\vec{x}) = f^{+}(d(\vec{x}), \vec{x}+1) \dot{-} 1.$$

Označenie: $\vec{x} + 1 \equiv x_1 + 1, \ldots, x_n + 1$.

μ-rekurzívne funkcie

Konštrukcia aproximačnej funkcie, časť prvá

Aproximačná funkcia D^+ diskriminačnej funkcie D:

$$\mathrm{D}^+(x, y, z) = \mathrm{D}(x, \mathrm{D}(x \dot{-} 1, y, z), 0).$$

Pre p.r. funkciu D^+ platia vzťahy

$$\mathrm{D}^+(0, y, z) = 0 \qquad \mathrm{D}^+(x + 1, y, z) = \mathrm{D}(x, y, z)$$
$$\mathrm{D}^+(x + 1, y + 1, z + 1) = \mathrm{D}(x, y, z) + 1.$$

Aproximačná funkcia g^+ pomocnej m-árnej funkcie g:

$$g^+(\vec{y}) = \begin{cases} g(\vec{z}) + 1 & \text{ak } \vec{y} = \vec{z} + 1 \text{ pre nejaké } \vec{z}, \\ 0 & \text{ináč.} \end{cases}$$

Pre μ-rekurzívnu funkciu g^+ platia vzťahy

$$\bigvee_{i=1}^{m} y_i = 0 \rightarrow g^+(\vec{y}) = 0 \qquad g^+(\vec{y} + 1) = g(\vec{y}) + 1.$$

μ-rekurzívne funkcie

Konštrukcia aproximačnej funkcie, časť druhá

Aproximačný term $\rho^+[f^+(z,\cdot);\vec{x}]$ pre podterm ρ termu τ:

$$\begin{aligned}
x_i^+ &\equiv x_i + 1 \\
c^+ &\equiv c + 1 \\
\mathrm{D}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)^+ &\equiv \mathrm{D}^+(\rho_1^+,\rho_2^+,\rho_3^+) \\
g(\rho_1,\ldots,\rho_m)^+ &\equiv g^+(\rho_1^+,\ldots,\rho_m^+) \\
f(\rho_1,\ldots,\rho_n)^+ &\equiv f^+(z,\rho_1^+,\ldots,\rho_n^+).
\end{aligned}$$

Definícia aproximačnej funkcie má tvar vnorenej jednoduchej rekurzie:

$$\begin{aligned}
f^+(0,\vec{x}) &= 0 \\
f^+(z+1,\vec{x}) &= \tau^+[f^+(z,\cdot);\vec{x}].
\end{aligned}$$

Aproximačná funkcia je preto μ-rekurzívna.

μ-rekurzívne funkcie

Lema

Trieda μ-rekurzívnych funkcií je obecne rekurzívne uzavretá.
Dôsledok: každá obecne rekurzívna funkcia je μ-rekurzívna.

Dôkaz

- Trieda μ-rekurzívnych funkcií je primitívne rekurzívne uzavretá. Dôsledok:
  - Funkcia nasledovníka $\mathrm{S}(x) = x + 1$ a funkcia predchodcu $x \dot{-} 1$ sú μ-rekurzívne funkcie.
  - Trieda je uzavretá na explicitné definície funkcií:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tau[x_1, \ldots, x_n].$$

- Trieda μ-rekurzívnych funkcií je uzavretá na regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tau[f; x_1, \ldots, x_n].$$

μ-rekurzívne funkcie

Lema

Trieda obecne rekurzívnych funkcií je μ-rekurzívne uzavretá.
Dôsledok: každá μ-rekurzívna funkcia je obecne rekurzívna.

Dôkaz

- Trieda obecne rekurz. funkcií je primitívne rekurz. uzavretá:
  - $\mathrm{S}, \mathrm{Z}, \mathrm{I}_i^n$ sú obecne rekurzívne funkcie.
  - Trieda je uzavretá na operátor kompozície funkcií:

    $$f(\vec{x}) = h\big(g_1(\vec{x}), \ldots, g_m(\vec{x})\big)$$

    a na operátor primitívnej rekurzie:

    $$f(0, \vec{y}) = g(\vec{y}) \qquad f(x+1, \vec{y}) = h\big(x, f(x, \vec{y}), \vec{y}\big).$$

- Trieda obecne rekurzívnych funkcií je uzavretá na operátor regulárnej minimalizácie:

  $$f(\vec{x}) = \mu y[g(y, \vec{x}) = 1].$$

μ-rekurzívne funkcie

Veta

Trieda obecne rekurzívnych funkcií je totožná s triedou μ-rekurzívnych funkcií.

Dôkaz.

Priamy dôsledok predošlých tvrdení.

Churchova téza (1936)

Trieda intuitívne vypočítateľných funkcií nad oborom prirodzených čísel je totožná s triedou obecne rekurzívnych funkcií.

Modely vypočítateľných funkcií (do roku 1936)

- λ-definovateľné funkcie [Church, 1932],
- obecne rekurzívne funkcie [Herbrand-Gödel, 1931, 1934],
- μ-rekurzívne funkcie [Kleene, 1935, 1952].

Záver

7. cvičenie

- Výsledky s komentárom nájdete na webe.

8. cvičenie

- Začína hneď po prednáške v miestnosti F1-248.
- Pracujte samostatne.
- Úlohy odovzdať najneskôr do 12:00 v pondelok budúci týždeň.

9. prednáška

- Návrh programovacieho jazyka deklaratívnej paradigmy.
- Efektívne operácie na primitívne rekurzívnych indexoch.