1-AIN-625 Úvod do matematickej logiky pre programátorov
1-INF-450 Logika pre informatikov

Zimný semester 2012/13

7. prednáška

Ján Komara

Obsah 7. prednášky

Zopakovanie

Primitívne rekurzívne funkcie

- Základný vývoj primitívne rekurzívnych funkcií.
- Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia.
- Párovacia funkcia a aritmetizácia (Gödelizácia).
- Vnorená jednoduchá rekurzia:

$$
\begin{aligned}
f(0,y) &= g(y)\\
f(x+1,y) &= h\Big(x, f\left(x, s_1(x,y)\right), f\left(x, s_2(x,y,f(x,s_1(x,y)))\right), y\Big).
\end{aligned}
$$

- Regulárne rekurzívne definície s mierou:

$$f(\vec{x}) = \tau[f;\vec{x}].$$

Podmienka regularity $\Gamma_{f(\vec{\rho})} \rightarrow \mu[\vec{\rho}] < \mu[\vec{x}]$ pre rekurzívne volanie $f(\vec{\rho})$ funkcie f v terme τ.

Zopakovanie

Vnorená jednoduchá rekurzia

Sú to definície v tvare

$$f(0,\vec{y}) = \rho[\vec{y}]$$
$$f(x+1,\vec{y}) = \tau[f(x,\cdot);x,\vec{y}].$$

Alternatívna formulácia (toto je klauzálna forma definície):

$$f(0,\vec{y}) = \rho[\vec{y}]$$
$$f(x+1,\vec{y}) = \theta[x,\vec{z},\vec{y}] \leftarrow \bigwedge_{i=1}^{k} f(x,\vec{\sigma}_i[x,\vec{y},z_1,\ldots,z_{i-1}]) = z_i.$$

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na vnorenú jednoduchú rekurziu.

Príklady rekurzívnych definícii s mierou

Euklidov algoritmus pre výpočet najväčšieho spoločného deliteľa

Rekurzívna definícia s mierou $\max(x, y)$:

$$
\begin{aligned}
\gcd(x,y) = \ & \textbf{if } x \neq 0 \land y \neq 0 \textbf{ then} \\
& \quad \textbf{case} \\
& \quad\quad x > y \Rightarrow \gcd(x \mathbin{\dot{-}} y, y) \\
& \quad\quad x = y \Rightarrow x \\
& \quad\quad x < y \Rightarrow \gcd(x, y \mathbin{\dot{-}} x) \\
& \quad \textbf{end} \\
& \textbf{else} \\
& \quad \max(x,y).
\end{aligned}
$$

Podmienky regularity zaručujú, že výpočet vždy skončí:

$$
\begin{gathered}
x \neq 0 \land y \neq 0 \land x > y \rightarrow \max(x \mathbin{\dot{-}} y, y) < \max(x, y) \\
x \neq 0 \land y \neq 0 \land x < y \rightarrow \max(x, y \mathbin{\dot{-}} x) < \max(x, y).
\end{gathered}
$$

Príklady rekurzívnych definícii s mierou

Aproximačná funkcia pre funkciu gcd

Špecifikácia aproximačnej funkcie

$$z > \max(x, y) \to f^+(z, x, y) = \gcd(x, y).$$

Definícia aproximačnej funkcie má tvar jednoduchej rekurzie

$$\begin{aligned}
f^+(0, x, y) &= 0 \\
f^+(z+1, x, y) &= \textbf{if } x \neq 0 \wedge y \neq 0 \textbf{ then} \\
&\qquad \textbf{case} \\
&\qquad\quad x > y \Rightarrow f^+(z, x \dot{-} y, y) \\
&\qquad\quad x = y \Rightarrow x \\
&\qquad\quad x < y \Rightarrow f^+(z, x, y \dot{-} x) \\
&\qquad \textbf{end} \\
&\quad \textbf{else} \\
&\qquad \max(x, y).
\end{aligned}$$

Primitívna rekurzívnosť $\gcd(x, y) = f^+\big(\max(x, y) + 1, x, y\big)$.

Príklady rekurzívnych definícii s mierou

Zarovnanie binárneho stromu

Klauzálna forma rekurzívnej definície:

$$\begin{aligned} \mathit{Flatten}(0) &= 0 \\ \mathit{Flatten}\langle u, 0\rangle &= \big\langle \mathit{Flatten}(u), 0\big\rangle \\ \mathit{Flatten}\big\langle u, \langle v, w\rangle\big\rangle &= \mathit{Flatten}\big\langle\langle u, v\rangle, w\big\rangle. \end{aligned}$$

Je to rekurzia s mierou $m(x)$:

$$\begin{aligned} m(0) &= 0 \\ m\langle v, w\rangle &= m(v) + 2m(w) + 1. \end{aligned}$$

Miera je primitívne rekurzívna funkcia (prečo?).
Podmienky regularity majú tvar

$$\begin{aligned} m(u) &< m\langle u, 0\rangle \\ m\big\langle\langle u, v\rangle, w\big\rangle &< m\big\langle u, \langle v, w\rangle\big\rangle. \end{aligned}$$

Príklady rekurzívnych definícii s mierou

Aproximačná funkcia pre funkciu *Flatten*

Špecifikácia aproximačnej funkcie

$$z > m(x) \rightarrow f^{+}(z, x) = \mathit{Flatten}(x).$$

Definícia aproximačnej funkcie má tvar jednoduchej rekurzie

$$\begin{aligned} f^{+}(0, x) &= 0 \\ f^{+}(z+1, 0) &= 0 \\ f^{+}(z+1, \langle u, 0\rangle) &= \big\langle f^{+}(z, u), 0 \big\rangle \\ f^{+}\big(z+1, \big\langle u, \langle v, w\rangle \big\rangle\big) &= f^{+}\big(z, \big\langle \langle u, v\rangle, w \big\rangle\big). \end{aligned}$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie *Flatten* plynie z tohoto vyjadrenia

$$\mathit{Flatten}(x) = f^{+}(m(x) + 1, x).$$

Príklady rekurzívnych definícii s mierou

McCarthyho 91 funkcia

Definícia:

$$\mathrm{f}_{91}(x) = \begin{cases} 91 & \text{ak } x \le 101, \\ x \dot{-} 10 & \text{ak } x \ge 101. \end{cases}$$

Alternatívne vyjadrenie pomocou vnorenej rekurzie

$$\mathrm{f}_{91}(x) = \textbf{if } x < 101 \textbf{ then } \mathrm{f}_{91}\,\mathrm{f}_{91}(x+11) \textbf{ else } x \dot{-} 10.$$

Je to korektná definícia?
Tvrdíme, že je to spätná rekurzia s mierou $101 \dot{-} x$. Podmienky regularity majú teda tvar

$$x < 101 \to 101 \dot{-} (x+11) < 101 \dot{-} x$$
$$x < 101 \to 101 \dot{-} \mathrm{f}_{91}(x+11) < 101 \dot{-} x.$$

Ako splniť druhú podmienku?

Príklady rekurzívnych definícii s mierou

Splnenie podmienok regularity pre McCarthyho 91 funkciu

Uvažujme funkciu f definovanou rekurzívnou rovnosťou

$$f(x) = \textbf{if } x < 101 \textbf{ then } [f]_x[f]_x(x+11) \textbf{ else } x \dot{-} 10. \tag{1}$$

Tu $[f]_x(y)$ je *zúženie* f na vstupy y také, že $101 \dot{-} y < 101 \dot{-} x$:

$$[f]_x(y) \equiv \textbf{if } 101 \dot{-} y < 101 \dot{-} x \textbf{ then } f(y) \textbf{ else } 0. \tag{2}$$

Každá rekurzívna aplikácia v (1) je strážená kontextom v tvare (2).
Je to korektná definícia.
Funkcia f spĺňa podmienky regularity pôvodnej rekurzívnej rovnice:

$$x < 101 \rightarrow 101 \dot{-} (x+11) < 101 \dot{-} x$$
$$x < 101 \rightarrow 101 \dot{-} f(x+11) < 101 \dot{-} x.$$

Táto funkcia je tiež jediným riešením pôvodnej rekurzívnej rovnice.

Príklady rekurzívnych definícii s mierou

Aproximačná funkcia pre McCarthyho 91 funkciu

Špecifikácia aproximačnej funkcie

$$z > 101 \dot{-} x \to f^+(z, x) = \mathrm{f}_{91}(x).$$

Definícia aproximačnej funkcie má tvar vnorenej jednoduchej rekurzie

$$\begin{aligned} f^+(0, x) &= 0 \\ f^+(z+1, x) &= \textbf{if } x < 101 \textbf{ then} \\ &\qquad f^+\big(z, f^+(z, x+11)\big) \\ &\quad \textbf{else} \\ &\qquad x \dot{-} 10. \end{aligned}$$

Primitívna rekurzívnosť McCarthyho 91 funkcie plynie z tohoto vyjadrenia

$$\mathrm{f}_{91}(x) = f^+(101 \dot{-} x + 1, x).$$

Syntaktická forma rekurzie s mierou

Rekurzia s mierou $\mu[\vec{x}]$

Sú to definície v tvare

$$f(\vec{x}) = \tau\big[[f]^{\mu}_{\vec{x}}; \vec{x}\big]. \tag{1}$$

Term na pravej strane rovnosti vznikol s termu $\tau[f; \vec{x}]$ nahradením každej rekurzívnej aplikácie $f(\vec{\rho})$ výrazom

$$[f]_{\vec{x}}(\vec{\rho}) \equiv \textbf{if } \mu[\vec{\rho}] < \mu[\vec{x}] \textbf{ then } f(\vec{\rho}) \textbf{ else } 0.$$

Každá rekurzívna aplikácia $f(\vec{\rho})$ v (1) je teda strážená podmienkou $\mu[\vec{\rho}] < \mu[\vec{x}]$.

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na rekurziu s mierou.

Syntaktická forma rekurzie s mierou

Dôkaz

Špecifikácia aproximačnej funkcie

$$z > \mu[\vec{x}] \rightarrow f^{+}(z, \vec{x}) = f(\vec{x}).$$

Definícia aprox. funkcie má tvar vnorenej jednoduchej rekurzie

$$\begin{aligned} f^{+}(0, \vec{x}) &= 0 \\ f^{+}(z+1, \vec{x}) &= \tau\left[[f^{+}]^{\mu}_{z,\vec{x}}; z, \vec{x}\right]. \end{aligned}$$

Term na pravej strane druhej rovnosti vznikol s termu $\tau[f; \vec{x}]$ nahradením každej rekurzívnej aplikácie $f(\vec{\rho})$ výrazom

$$[f^{+}]^{\mu}_{z,\vec{x}}(\vec{\rho}) \equiv \textbf{if } \mu[\vec{\rho}] < \mu[\vec{x}] \textbf{ then } f^{+}(z, \vec{\rho}) \textbf{ else } 0.$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$f(\vec{x}) = f^{+}(\mu[\vec{x}] + 1, \vec{x}).$$

Regulárne rekurzívne definície s mierou

Regulárna rekurzia s mierou $\mu[\vec{x}]$

Sú to definície v tvare

$$f(\vec{x}) = \tau[f; \vec{x}], \tag{1}$$

pre ktoré sú splnené podmienky regularity.
Podmienky regularity majú tvar:

$$\Gamma^{\tau}_{f(\vec{\rho})}[f; \vec{x}] \rightarrow \mu\big[\vec{\rho}\big[f; \vec{x}\big]\big] < \mu[\vec{x}]$$

pre každú rekurzívnu aplikáciu $f(\vec{\rho})$ funkcie f, ktorá je strážená podmienkou $\Gamma^{\tau}_{f(\vec{\rho})}$ v terme τ.
Splnenie podmienok regularity sa overuje pre funkciu, ktorá je definovaná pridruženou rovnosťou:

$$f(\vec{x}) = \tau\big[[f]^{\mu}_{\vec{x}}; \vec{x}\big].$$

Táto funkcia je potom jediným riešením funkcionálnej rovnice (1).

Regulárne rekurzívne definície s mierou

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na regulárnu rekurziu s mierou.

Dôkaz

Pridružená rovnosť má tvar syntaktickej formy rekurzie s mierou:

$$f(\vec{x}) = \tau\big[[f]^{\mu}_{\vec{x}}; \vec{x}\big].$$

Funkcia f definovaná týmto vzťahom je preto primitívne rekurzívna.

Poznámka

Číslo $\mu[\vec{x}] + 1$ predstavuje horný odhad na hĺbku výpočtového stromu pre výpočet aplikácie $f(\vec{x})$ pomocou programu

$$f(\vec{x}) = \tau[f; \vec{x}].$$

Charakterizačný problém

Veta

Trieda primitívne rekurzívnych funkcií je najmenšia trieda funkcií, ktorá obsahuje funkciu nasledovníka $\mathsf{S}(x) = x + 1$, *funkciu predchodcu* $x \dot{-} 1$ *a je uzavretá na explicitné definície a regulárnu rekurziu s mierou.*

Dôkaz.

Označenie:

- PRIM = trieda primitívne rekurzívnych funkcií.
- REG = najmenšia trieda funkcií, ktorá obsahuje funkciu nasledovníka $\mathsf{S}(x) = x + 1$, funkciu predchodcu $x \dot{-} 1$ a je uzavretá na explicitné definície a regulárnu rekurziu s mierou.

Cieľom je dokázať rovnosť

$$\mathrm{PRIM} = \mathrm{REG}.$$

Charakterizačný problém

Dôkaz inklúzie $\mathrm{PRIM} \subseteq \mathrm{REG}$

- $\mathsf{S} \in \mathrm{REG}$, pretože S je základná funkcia triedy REG.
- $\mathsf{Z} \in \mathrm{REG}$ plynie z tohoto vyjadrenia $\mathsf{Z}(x) = 0$.
- $\mathsf{I}_i^n \in \mathrm{REG}$ plynie z tohoto vyjadrenia $\mathsf{I}_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$.
- Trieda REG je uzavretá na operátor kompozície funkcií:

  $$f(x_1, \ldots, x_n) = h\big(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)\big).$$

  Je to totiž špeciálny prípad explicitnej definície.
- Trieda REG je uzavretá na operátor primitívnej rekurzie:

  $$f(0, \vec{y}) = g(\vec{y}) \qquad f(x+1, \vec{y}) = h\big(x, f(x, \vec{y}), \vec{y}\big).$$

  Je to špeciálny prípad regulárnej rekurzie s mierou $\mu[x, \vec{y}] = x$:

  $$f(x, \vec{y}) = \textbf{if } x \neq 0 \textbf{ then } h\big(x \dot{-} 1, f(x \dot{-} 1, \vec{y}), \vec{y}\big) \textbf{ else } g(\vec{y}).$$

Charakterizačný problém

Dôkaz inklúzie $\mathrm{REG} \subseteq \mathrm{PRIM}$

- $\mathsf{S} \in \mathrm{PRIM}$, pretože S je základná funkcia triedy PRIM.
- $\lambda x.x \dot{-} 1 \in \mathrm{PRIM}$ plynie z tohoto vyjadrenia

$$0 \dot{-} 1 = 0 \qquad\qquad x + 1 \dot{-} 1 = x.$$

- Trieda PRIM je uzavretá na explicitné definície funkcií:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tau[x_1, \ldots, x_n].$$

  Dôkaz tvrdenia na 3. prednáške.

- Trieda PRIM je uzavretá na regulárnu rekurziu s mierou:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tau[f; x_1, \ldots, x_n].$$

  Dôkaz tvrdenia na tejto prednáške.

Záver

6. cvičenie

- Výsledky s komentárom nájdete na webe.

7. cvičenie

- Začína hneď po prednáške v miestnosti F1-248.
- Pracujte samostatne.
- Úlohy odovzdať najneskôr do 12:00 v pondelok budúci týždeň.

8. prednáška

- Poza primitívnu rekurziu:
  - Ackermann-Péterovej funkcia,
  - univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie.
- Obecne rekurzívne funkcie.