1-AIN-625 Úvod do matematickej logiky pre programátorov
1-INF-450 Logika pre informatikov

Zimný semester 2012/13
6. prednáška

Ján Komara

Obsah 6. prednášky

Zopakovanie

Primitívne rekurzívne funkcie

- Základný vývoj primitívne rekurzívnych funkcií.
- Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia.
- Párovacia funkcia a aritmetizácia (Gödelizácia).
- Vnorená jednoduchá rekurzia:

$$\begin{aligned} f(0,y) &= g(y) \\ f(x+1,y) &= h\Big(x, f\left(x, s_1(x,y)\right), f\left(x, s_2(x,y,f(x,s_1(x,y)))\right), y\Big). \end{aligned}$$

- Regulárne rekurzívne definície s mierou:

$$f(\vec{x}) = \tau[f;\vec{x}].$$

Podmienka regularity $\Gamma_{f(\vec{\rho})} \to \mu[\vec{\rho}] < \mu[\vec{x}]$ pre rekurzívne volanie $f(\vec{\rho})$ funkcie f v terme τ.

Zopakovanie

Cantorova párovacia funkcia (modifikovaná verzia)

$\langle x, y \rangle$	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
0	1	2	4	7	11	16	22	$\cdots$
1	3	5	8	12	17	23	30	$\cdots$
2	6	9	13	18	24	31	39	$\cdots$
3	10	14	19	25	32	40	49	$\cdots$
4	15	20	26	33	41	50	60	$\cdots$
5	21	27	34	42	51	61	72	$\cdots$
6	28	35	43	52	62	73	85	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=0}^{x+y} i + 1 + x.$$

Zopakovanie

Vlastnosti párovacej funkcie

Modifikovaná verzia Cantorovej párovacej funkcie má tieto základné vlastnosti:

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \langle y_1, y_2 \rangle \rightarrow x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2$$
$$x < \langle x, y \rangle \wedge y < \langle x, y \rangle$$
$$x = 0 \vee \exists y \exists z\, x = \langle y, z \rangle.$$

Pre $n \geq 3$ zapisujeme $\big\langle x_1, \langle x_2, \ldots, x_n \rangle \big\rangle$ skrátene $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$.

Projekcie

Unárne projekcie π_1 a π_2 spĺňajú tieto identity:

$$\pi_1 \langle x, y \rangle = x \qquad \pi_2 \langle x, y \rangle = y \qquad \pi_1(0) = 0 = \pi_2(0).$$

Zopakovanie

Aritmetizácia karteziánskeho súčinu

Kódom n-tice $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{N}^n$ je číslo

$$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in \mathrm{N}.$$

Binárny primitívne rekurzívny predikát $Tuple(n, x)$ platí, ak číslo x je kódom nejakej n-tice prirodzených čísel:

$$Tuple(n, x) \leftrightarrow n = 0 \wedge x = 0 \vee n = 1 \vee n \geq 2 \wedge \pi_2^{n-2}(x) \neq 0.$$

Zobecnením projekcií π_1, π_2 je ternárna funkcia $[x]_i^n$ taká, že

$$[\langle x_1, \ldots, x_n \rangle]_i^n = x_i \qquad \text{pre } 1 \leq i \leq n.$$

Primitívna rekurzívnosť plynie z tohoto vyjadrenia

$$[x]_i^n = \textbf{if } i \neq n \textbf{ then } \pi_1 \pi_2^{i \dot{-} 1}(x) \textbf{ else } \pi_2^{n \dot{-} 1}(x).$$

Zopakovanie

Aritmetizácia konečných postupností

Kódom konečnej postupnosti $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathrm{N}^n$ je číslo

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, 0\rangle.$$

Kódom prázdnej postupnosti $\emptyset$ je číslo 0.
Funkcia $\mathsf{L}(x)$ vypočíta dĺžku postupnosti x:

$$\mathsf{L}\,\langle x_1, \ldots, x_n, 0\rangle = n.$$

Binárna operácia $(x)_i$ vráti $(i{+}1)$-vý prvok postupnosti x:

$$\big(\langle x_0, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1}, 0\rangle\big)_i = x_i \qquad \text{pre } i < n.$$

Primitívna rekurzívnosť plynie z tohoto vyjadrenia

$$\mathsf{L}(x) = \mu n \leq x[\pi_2^n(x) = 0] \qquad\qquad (x)_i = \pi_1\, \pi_2^i(x).$$

Zopakovanie

Spätná rekurzia

Sú to definície v tvare

$$f(x, \vec{y}) = \begin{cases} \rho[x, \vec{y}] & \text{ak } x \geq \theta[\vec{y}], \\ \tau\,[x, f(x+1, \vec{y}), \vec{y}] & \text{ak } x < \theta[\vec{y}]. \end{cases}$$

'Course-of-values' rekurzia

Sú to definície v tvare

$$\begin{aligned} f(0, \vec{y}) &= \rho[\vec{y}] \\ f(x+1, \vec{y}) &= \tau\big[x, f\big(\xi_1[x, \vec{y}], \vec{y}\big), \ldots, f\big(\xi_k[x, \vec{y}], \vec{y}\big), \vec{y}\big], \end{aligned}$$

kde $\xi_1[x, \vec{y}] \leq x \wedge \cdots \wedge \xi_k[x, \vec{y}] \leq x$.

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na spätnú rekurziu a 'course-of-values' rekurziu.

Rekurzia so substitúciou v parametri

Príklad

Fibonacciho postupnosť

$$f_0 = 0 \qquad f_1 = 1 \qquad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

Efektívna implementácia

$$\begin{aligned} g(0, a, b) &= a \\ g(n+1, a, b) &= g(n, a+b, a) \\ f_0 &= 0 \\ f_{n+1} &= g(n, 1, 0). \end{aligned}$$

Pomocná funkcia $g(n, a, b)$ je definovaná rekurziou podľa n so substitúciou v parametri a a b.
Korektnosť implementácie plynie z tejto vlastnosti

$$g\left(n, f_{k+1}, f_k\right) = f_{n+1+k}.$$

Rekurzia so substitúciou v parametri

Rekurzia so substitúciou v parametri

Sú to definície v tvare

$$\begin{aligned} f(0, \vec{y}) &= \rho[\vec{y}] \\ f(x+1, \vec{y}) &= \tau\big[x, f(x, \vec{\sigma}_1[x, \vec{y}]), \ldots, f(x, \vec{\sigma}_k[x, \vec{y}]), \vec{y}\big]. \end{aligned}$$

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na rekurziu so substitúciou v parametri.

Poznámka

Vetu dokážeme pre prípad $k = 1$.

Rekurzia so substitúciou v parametri

Dôkaz vety pre prípad $k = 1$ a jeden parameter, časť prvá

Uvažujme definíciu v tvare

$$
\begin{aligned}
f(0, y) &= g(y) \\
f(x+1, y) &= h\Big(x, f(x, s(x, y)), y\Big).
\end{aligned}
$$

Ukážeme, že funkcia histórie $\overline{f}$:

$$
\begin{aligned}
\overline{f}(0, y) &= \big\langle f(0, y), 0 \big\rangle \\
\overline{f}(x+1, y) &= \Big\langle f(x+1, y), \overline{f}(x, s(x, y)) \Big\rangle
\end{aligned}
$$

je primitívne rekurzívna.
Primitívna rekurzívnosť funkcie f potom plynie z tohoto vyjadrenia

$$
f(x, y) = \big(\overline{f}(x, y)\big)_0 .
$$

Rekurzia so substitúciou v parametri

Dôkaz vety pre prípad $k = 1$ a jeden parameter, časť druhá

Selektor pre rekurzívne argumenty

$$\mathbf{x}_i(x) = x \dot{-} i.$$

Selektor pre parametre

$$\mathbf{y}_0(x, y) = y \qquad \mathbf{y}_{i+1}(x, y) = s\big(\mathbf{x}_i(x) \dot{-} 1, \mathbf{y}_i(x, y)\big).$$

Funkcia čiastočnej histórie

$$\overline{f}(x, y).i = \begin{cases} \Big\langle g\big(\mathbf{y}_i(x, y)\big), 0\Big\rangle & \text{ak } i \geq x, \\ \Big\langle h\Big(\mathbf{x}_i(x) \dot{-} 1, \big(\overline{f}(x, y).(i+1)\big)_0, \mathbf{y}_i(x, y)\Big), \overline{f}(x, y).(i+1)\Big\rangle & \\ & \text{ak } i < x. \end{cases}$$

Funkcia histórie

$$\overline{f}(x, y) = \overline{f}(x, y).0.$$

Rekurzia so substitúciou v parametri

Rekurzia so substitúciou v parametri a kontrakcia parametrov

Uvažujme definíciu v tvare

$$f(0, y_1, y_2) = g(y_1, y_2)$$
$$f(x+1, y_1, y_2) = h\Big(x, f(x, s_1(x, y_1, y_2), s_2(x, y_1, y_2)), y_1, y_2\Big).$$

Ukážeme najprv, že binárna funkcia $\langle f\rangle(x, \langle y_1, y_2\rangle) = f(x, y_1, y_2)$ je primitívne rekurzívna:

$$\langle f\rangle(0, y) = g\big([y]^2_1, [y]^2_2\big)$$
$$\langle f\rangle(x+1, y) =$$
$$h\Big(x, \langle f\rangle\Big(x, \Big\langle s_1\big(x, [y]^2_1, [y]^2_2\big), s_2\big(x, [y]^2_1, [y]^2_2\big)\Big\rangle\Big), [y]^2_1, [y]^2_2\Big).$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$f(x, y_1, y_2) = \langle f\rangle(x, \langle y_1, y_2\rangle).$$

Rekurzia so substitúciou v parametri

Rekurzia so substitúciou v parametri a analýza prípadov

Uvažujme definíciu v tvare

$$
\begin{aligned}
f(0, y) &= g(y) \\
f(x+1, y) &= \begin{cases} h_1\Big(x, f\big(x, s_1(x, y)\big), y\Big) & \text{ak } R(x, y), \\ h_2\Big(x, f\big(x, s_2(x, y)\big), y\Big) & \text{ak } \neg R(x, y). \end{cases}
\end{aligned}
$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$
\begin{aligned}
h(x, z, y) &= \textbf{if } R(x, y) \textbf{ then } h_1(x, z, y) \textbf{ else } h_2(x, z, y) \\
s(x, y) &= \textbf{if } R(x, y) \textbf{ then } s_1(x, y) \textbf{ else } s_2(x, y) \\
f(0, y) &= g(y) \\
f(x+1, y) &= h\Big(x, f\big(x, s(x, y)\big), y\Big).
\end{aligned}
$$

Vnorená jednoduchá rekurzia

Vnorená jednoduchá rekurzia

Sú to definície v tvare

$$f(0, \vec{y}) = \rho[\vec{y}]$$
$$f(x+1, \vec{y}) = \tau[f(x, \cdot); x, \vec{y}].$$

Alternatívna formulácia (toto je klauzálna forma definície):

$$f(0, \vec{y}) = \rho[\vec{y}]$$

$$f(x+1, \vec{y}) = \theta[x, \vec{z}, \vec{y}] \leftarrow \bigwedge_{i=1}^{k} f(x, \vec{\sigma}_i[x, \vec{y}, z_1, \ldots, z_{i-1}]) = z_i.$$

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na vnorenú jednoduchú rekurziu.

Vnorená jednoduchá rekurzia

Dôkaz vety pre prípad $k = 2$ a jeden parameter, časť prvá

Uvažujme definíciu v tvare

$$
\begin{aligned}
f(0, y) &= g(y) \\
f(x+1, y) &= h\Big(x, f(x, s_1(x, y)), f\left(x, s_2\left(x, y, f(x, s_1(x, y))\right)\right), y\Big).
\end{aligned}
$$

Ukážeme najprv, že funkcia histórie $\overline{f}$:

$$
\begin{aligned}
\overline{f}(0, y) &= \langle f(0, y), 0, 0 \rangle \\
\overline{f}(x+1, y) &= \Big\langle f(x+1, y), \overline{f}(x, s_1(x, y)), \\
&\qquad\qquad \overline{f}\left(x, s_2\left(x, y, f(x, s_1(x, y))\right)\right) \Big\rangle.
\end{aligned}
$$

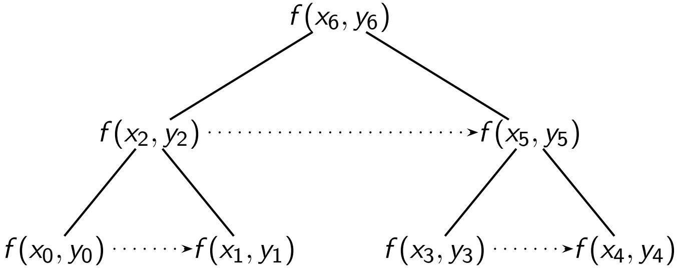
je primitívne rekurzívna funkcia.
Primitívna rekurzívnosť funkcie f potom plynie z tohoto vyjadrenia

$$
f(x, y) = \pi_1 \, \overline{f}(x, y).
$$

Vnorená jednoduchá rekurzia

Dôkaz vety pre prípad $k = 2$ a jeden parameter, časť druhá

Príklad výpočtového stromu pre aplikáciu v tvare $f(2, \cdot)$:



Postupnosť histórie pre aplikáciu $f(x, y)$

$$f(x_0, y_0), f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), \ldots, f(x_j, y_j), \ldots, f(x_i, y_i), \ldots$$

odpovedá spätnému prechodu výpočtového stromu $\overline{f}(x, y)$.

Vnorená jednoduchá rekurzia

Dôkaz vety pre prípad $k = 2$ a jeden parameter, časť tretia

Funkcia $U(x, y, t, i)$ modifikuje čiastočný výpočtový strom t pre aplikáciu $f(x, y)$ v pozícií i hodnotou $f(x_i, y_i)$:

$$U(0, y, t, i) = \langle g(y), 0, 0 \rangle$$

$$U(x+1, y, t, i) = \begin{cases} \Big\langle z, U\big(x, s_1(x, y), l, i\big), r \Big\rangle & \text{ak } i < 2^{x+1} \dot- 1 \text{ a } t = \langle z, l, r \rangle \text{ pre nejaké } z, l, r; \\ \Big\langle z, l, U\big(x, s_2(x, y, \pi_1(l)), r, j\big) \Big\rangle & \text{ak } i = 2^{x+1} \dot- 1 + j \text{ pre } j < 2^{x+1} \dot- 1 \text{ a } t = \langle z, l, r \rangle \text{ pre nejaké } z, l, r; \\ \Big\langle h\big(x, \pi_1(l), \pi_1(r), y\big), l, r \Big\rangle & \text{ak } i = 2^{x+2} \dot- 2 \text{ a } t = \langle z, l, r \rangle \text{ pre nejaké } z, l, r; \\ 0 & \text{ináč.} \end{cases}$$

Je to rekurzia so substitúciou v parametri, funkcia je preto primitívne rekurzívna.

Vnorená jednoduchá rekurzia

Dôkaz vety pre prípad $k = 2$ a jeden parameter, časť štvrtá

Funkcia $M_i(x, y, t)$ modifikuje čiastočný výpočtový strom t pre aplikáciu $f(x, y)$ v každej pozícií $j < i$ hodnotou $f(x_j, y_j)$:

$$\begin{aligned} M_0(x, y, t) &= t \\ M_{i+1}(x, y, t) &= U\big(x, y, M_i(x, y, t), i\big). \end{aligned}$$

Funkcia $Mkpbt(n)$ vytvorí perfektný binárny strom hĺbky n:

$$\begin{aligned} Mkpbt(0) &= 0 \\ Mkpbt(n+1) &= \big\langle 0, Mkpbt(n), Mkpbt(n) \big\rangle. \end{aligned}$$

Funkcia $\overline{f}$(x,y) vytvorí úplný výpočtový strom pre aplikáciu $f(x, y)$:

$$\overline{f}(x, y) = M_{2^{x+1} \dot{-} 1}\big(x, y, Mkpbt(x+1)\big).$$

Všetky funkcie sú primitívne rekurzívne.

Záver

5. cvičenie

- Výsledky s komentárom nájdete na webe.

6. cvičenie

- Začína hneď po prednáške v miestnosti F1-248.
- Pracujte samostatne.
- Úlohy odovzdať najneskôr do 12:00 v pondelok budúci týždeň.

7. prednáška

- Regulárne rekurzívne definície s mierou.