1-AIN-625 Úvod do matematickej logiky pre programátorov
1-INF-450 Logika pre informatikov

Zimný semester 2012/13

5. prednáška

Ján Komara

Obsah 5. prednášky

Zopakovanie

Primitívne rekurzívne funkcie

- Základný vývoj primitívne rekurzívnych funkcií.
- Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia.
- Párovacia funkcia a aritmetizácia (Gödelizácia).
- Vnorená jednoduchá rekurzia:

$$\begin{aligned} f(0, y) &= g(y) \\ f(x+1, y) &= h\Big(x, f\left(x, s_1(x, y)\right), f\left(x, s_2(x, y, f(x, s_1(x, y)))\right), y\Big). \end{aligned}$$

- Regulárne rekurzívne definície s mierou:

$$f(\vec{x}) = \tau[f; \vec{x}].$$

Podmienka regularity $\Gamma_{f(\vec{\rho})} \rightarrow \mu[\vec{\rho}] < \mu[\vec{x}]$ pre rekurzívne volanie $f(\vec{\rho})$ funkcie f v terme τ.

Zopakovanie

Explicitné definície predikátov

Sú to definície v tvare

$$P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi[x_1, \ldots, x_n].$$

Veta

Primitívne rekurzívne predikáty sú uzavreté na explicitné definície predikátov s ohraničenými formulami.

Ohraničená minimalizácia

Sú to definície funkcií v tvare (φ je ohraničená formula)

$$f(\vec{x}) = \mu y \leq \tau[\vec{x}]\big[\varphi[\vec{x}, y]\big].$$

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na definície funkcií ohraničenou minimalizáciou.

Zopakovanie

Príklady primitívne rekurzívnych funkcií a predikátov

- Ternárna diskriminačná funkcia

$$\mathrm{D}(x, y, z) = v \leftrightarrow x \neq 0 \land v = y \lor x = 0 \land v = z.$$

Notačná konvencia

$$\begin{aligned} D(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &\equiv \textbf{if } \tau_1 \neq 0 \textbf{ then } \tau_2 \textbf{ else } \tau_3 \\ D\big(P_*(\vec{\tau}_1), \tau_2, \tau_3\big) &\equiv \textbf{if } P(\vec{\tau}_1) \textbf{ then } \tau_2 \textbf{ else } \tau_3. \end{aligned}$$

- Rovnosti a nerovnosti:

$$x = y \quad x \neq y \quad x \leq y \quad x < y \quad x \geq y \quad x > y.$$

Párovacia funkcia

Cantorova párovacia funkcia

$\mathrm{J}(x,y)$	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
0	0	1	3	6	10	15	21	$\cdots$
1	2	4	7	11	16	22	29	$\cdots$
2	5	8	12	17	23	30	38	$\cdots$
3	9	13	18	24	31	39	48	$\cdots$
4	14	19	25	32	40	49	59	$\cdots$
5	20	26	33	41	50	60	71	$\cdots$
6	27	34	42	51	61	72	84	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

$$\mathrm{J}(x,y) = \sum_{i=0}^{x+y} i + x.$$

Párovacia funkcia

Cantorova párovacia funkcia (modifikovaná verzia)

$\langle x, y \rangle$	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
0	1	2	4	7	11	16	22	$\cdots$
1	3	5	8	12	17	23	30	$\cdots$
2	6	9	13	18	24	31	39	$\cdots$
3	10	14	19	25	32	40	49	$\cdots$
4	15	20	26	33	41	50	60	$\cdots$
5	21	27	34	42	51	61	72	$\cdots$
6	28	35	43	52	62	73	85	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=0}^{x+y} i + 1 + x.$$

Párovacia funkcia

Vlastnosti párovacej funkcie

Modifikovaná verzia Cantorovej párovacej funkcie má tieto základné vlastnosti:

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \langle y_1, y_2 \rangle \to x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2$$
$$x < \langle x, y \rangle \wedge y < \langle x, y \rangle$$
$$x = 0 \vee \exists y \exists z \, x = \langle y, z \rangle.$$

Dôsledok:

$$0 \neq \langle x, y \rangle.$$

Číslo 0 je jediný atom.

Párovacia funkcia

Projekcie

Unárne projekcie π_1 a π_2 spĺňajú tieto identity:

$$\pi_1\langle x, y\rangle = x$$
$$\pi_2\langle x, y\rangle = y$$
$$\pi_1(0) = 0 = \pi_2(0).$$

Primitívna rekurzívnosť oboch funkcií plynie z tohoto vyjadrenia

$$\pi_1(x) = \mu y < x[\exists z < x\, x = \langle y, z\rangle]$$
$$\pi_2(x) = \mu z < x[\exists y < x\, x = \langle y, z\rangle].$$

Párovacia funkcia

Príklad

Fibonacciho postupnosť je p.r. funkcia:

$$f_0 = 0 \qquad f_1 = 1 \qquad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

Uvažujme totiž funkciu

$$g(n) = \langle f_n, f_{n+1} \rangle.$$

Platí teda

$$f_n = \pi_1\, g(n).$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie g (a tým aj f_n) plynie z

$$\begin{aligned} g(0) &= \langle f_0, f_1 \rangle = \langle 0, 1 \rangle \\ g(n+1) &= \langle f_{n+1}, f_{n+2} \rangle = \left\langle \pi_2\, g(n), f_{n+1} + f_n \right\rangle = \\ &= \left\langle \pi_2\, g(n), \pi_2\, g(n) + \pi_1\, g(n) \right\rangle. \end{aligned}$$

Aritmetizácia karteziánskeho súčinu

Aritmetizácia

Kódom n-tice $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{N}^n$ je číslo

$$\ulcorner (x_1, \ldots, x_n) \urcorner^n \in \mathrm{N},$$

ktoré je definované induktívne takto:

$$\begin{aligned} \ulcorner \emptyset \urcorner^0 &= 0 \\ \ulcorner x \urcorner^1 &= x \\ \ulcorner (x_1, x_2, \ldots, x_n) \urcorner^n &= \left\langle x_1, \ulcorner (x_2, \ldots, x_n) \urcorner^{n-1} \right\rangle \qquad \text{ak } n \geq 2. \end{aligned}$$

Príklad

Kódovanie dvojíc a trojíc sa prekrýva:

$$\begin{aligned} &\ulcorner (0,1) \urcorner^2 = \langle 0, 1 \rangle = 2 \\ &\ulcorner (0,0,0) \urcorner^3 = \left\langle 0, \ulcorner (0,0) \urcorner^2 \right\rangle = \left\langle 0, \langle 0, 0 \rangle \right\rangle = \langle 0, 1 \rangle = 2. \end{aligned}$$

Aritmetizácia karteziánskeho súčinu

Notácia

Pre $n \geq 3$ zapisujeme $\big\langle x_1, \langle x_2, \ldots, x_n \rangle \big\rangle$ skrátene $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$:

$$\ulcorner (x_1, \ldots, x_n) \urcorner^n = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle.$$

Vlastnosť byť kódom n-tice prirodzených čísel

Binárny primitívne rekurzívny predikát $Tuple(n, x)$ platí, ak číslo x je kódom nejakej n-tice prirodzených čísel:

$$Tuple(n, x) \leftrightarrow n = 0 \wedge x = 0 \vee n = 1 \vee n \geq 2 \wedge \pi_2^{n-2}(x) \neq 0.$$

Zdôvodnenie pre $n \geq 2$:

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n \, x = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \leftrightarrow \pi_2^{n-2}(x) \neq 0.$$

Aritmetizácia karteziánskeho súčinu

Projekcia

Zobecnením projekcií π_1 a π_2 je ternárna funkcia $[x]_i^n$ taká, že

$$[\langle x_1, \dots, x_n \rangle]_i^n = x_i \qquad \text{pre } 1 \leq i \leq n.$$

Primitívna rekurzívnosť plynie z tohoto vyjadrenia

$$[x]_i^n = \begin{cases} \pi_2^{i \dot{-} 1}(x) & \text{ak } 1 \leq i < n, \\ \pi_2^{n \dot{-} 1}(x) & \text{ak } i = n, \\ \dots & \text{ináč.} \end{cases}$$

Zdôvodnenie pre $n \geq 2$:

$$x = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \to \bigwedge_{i=1}^{n-1} x_i = \pi_1 \, \pi_2^{i-1}(x) \wedge x_n = \pi_2^{n-1}(x).$$

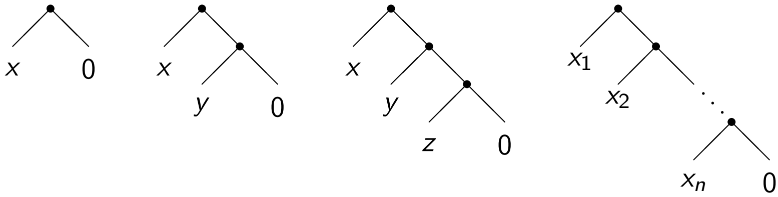
Aritmetizácia konečných postupností

Aritmetizácia

Kódom konečnej postupnosti $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathrm{N}^n$ je číslo

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, 0 \rangle.$$

Kódom prázdnej postupnosti je číslo 0.



$\langle x, 0 \rangle$ $\quad$ $\langle x, y, 0 \rangle$ $\quad$ $\langle x, y, z, 0 \rangle$ $\quad$ $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, 0 \rangle$

Každé prirodzené číslo je kódom nejakej konečnej postupnosti.

Aritmetizácia konečných postupností

Dĺžka postupnosti

Funkcia $\mathsf{L}(x)$ vypočíta dĺžku postupnosti x:

$$\mathsf{L}\left\langle x_1, \ldots, x_n, 0 \right\rangle = n.$$

Primitívna rekurzívnosť plynie z tohoto vyjadrenia

$$\mathsf{L}(x) = \mu n \leq x[\pi_2^n(x) = 0].$$

Indexovacia funkcia

Binárna operácia $(x)_i$ vráti $(i+1)$-vý prvok postupnosti x:

$$\left(\langle x_0, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1}, 0 \rangle\right)_i = x_i \qquad \text{pre } i < n.$$

Primitívna rekurzívnosť plynie z tohoto vyjadrenia

$$(x)_i = \pi_1\, \pi_2^i(x).$$

'Course-of-values' rekurzia

Príklad

Fibonacciho postupnosť

$$f_0 = 0$$
$$f_1 = 1$$
$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

Alternatívna definícia

$$f_0 = 0$$
$$f_{n+1} = \mathrm{D}\big(n, f_n + f_{n \dot{-} 1}, 1\big).$$

Podmienky regularity

$$n < n + 1 \wedge n \dot{-} 1 < n + 1.$$

'Course-of-values' rekurzia

Príklad

Dĺžka zápisu čísla v binárnej reprezentácií

$$
\begin{aligned}
|0|_{\mathrm{b}} &= 0 \\
|2x|_{\mathrm{b}} &= |x|_{\mathrm{b}} + 1 && \text{ak } x \neq 0 \\
|2x+1|_{\mathrm{b}} &= |x|_{\mathrm{b}} + 1.
\end{aligned}
$$

Alternatívna definícia

$$
\begin{aligned}
|0|_{\mathrm{b}} &= 0 \\
|x+1|_{\mathrm{b}} &= |(x+1) \div 2|_{\mathrm{b}} + 1.
\end{aligned}
$$

Podmienka regularity

$$(x+1) \div 2 < x+1.$$

'Course-of-values' rekurzia

'Course-of-values' rekurzia

Sú to definície v tvare

$$f(0,\vec{y}) = \rho[\vec{y}]$$
$$f(x+1,\vec{y}) = \tau\big[x, f\big(\xi_1[x,\vec{y}],\vec{y}\big),\ldots, f\big(\xi_k[x,\vec{y}],\vec{y}\big),\vec{y}\big],$$

kde

$$\xi_1[x,\vec{y}] \leq x \wedge \cdots \wedge \xi_k[x,\vec{y}] \leq x.$$

Podmienky regularity:

$$\xi_1[x,\vec{y}] < x+1 \wedge \cdots \wedge \xi_k[x,\vec{y}] < x+1.$$

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na 'course-of-values' rekurziu.

'Course-of-values' rekurzia

Dôkaz vety

Uvažujme definíciu v tvare

$$f(0) = m$$
$$f(x+1) = h\big(x, f\, s(x)\big),$$

kde $s(x) \leq x$.
Tvrdíme, že funkcia histórie $\overline{f}$ pre f:

$$\overline{f}(x) = \big\langle f(x), f(x-1), \ldots, f(2), f(1), f(0), 0\big\rangle$$
$$\mathrm{L}\,\overline{f}(x) = x + 1 \land \forall z \leq x\, f(z) = \big(\overline{f}(x)\big)_{x \dot{-} z}$$

je primitívne rekurzívna funkcia. Primitívna rekurzívnosť funkcie f potom plynie z tohoto vyjadrenia

$$f(x) = \big(\overline{f}(x)\big)_0.$$

'Course-of-values' rekurzia

Primitívna rekurzívnosť funkcie histórie

Potrebujeme, aby platilo

$$\begin{aligned}\overline{f}(0) &= \big\langle f(0), 0\big\rangle = \langle m, 0\rangle \\ \overline{f}(x+1) &= \big\langle f(x+1), \overline{f}(x)\big\rangle = \Big\langle h\big(x, f\ s(x)\big), \overline{f}(x)\Big\rangle \\ &= \Bigg\langle h\Big(x, \big(\overline{f}(x)\big)_{x \dot{-} s(x)}\Big), \overline{f}(x)\Bigg\rangle.\end{aligned}$$

Funkcia histórie je primitívne rekurzívna z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned}\overline{f}(0) &= \langle m, 0\rangle \\ \overline{f}(x+1) &= \Bigg\langle h\Big(x, \big(\overline{f}(x)\big)_{x \dot{-} s(x)}\Big), \overline{f}(x)\Bigg\rangle.\end{aligned}$$

Záver

4. cvičenie

- Výsledky s komentárom nájdete na webe.

5. cvičenie

- Začína hneď po prednáške v miestnosti F1-248.
- Pracujte samostatne.
- Úlohy odovzdať najneskôr do 12:00 v pondelok budúci týždeň.

6. prednáška

- Vnorená jednoduchá rekurzia:

$$\begin{aligned} f(0, y) &= g(y) \\ f(x+1, y) &= h\Big(x, f\left(x, s_1(x, y)\right), f\left(x, s_2(x, y, f(x, s_1(x, y)))\right), y\Big). \end{aligned}$$