

1-AIN-625 Úvod do matematickej logiky pre  
programátorov

1-INF-450 Logika pre informatikov

Zimný semester 2012/13

4. prednáška

Ján Komara

# Obsah 4. prednášky

Zopakovanie

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Spätná rekurzia

Záver

# Zopakovanie

## Cieľ predmetu

- ▶ Vybudovať matematické základy deklaratívnych programovacích jazykov.

## Stručná osnova predmetu

- ▶ Primitívne rekurzívne funkcie
  - ▶ Aritmetizácia dátových štruktúr (Gödelizácia).
  - ▶ Regulárne rekurzívne definície s mierou.
- ▶ Obecné rekurzívne funkcie
  - ▶ Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií:
    - ▶ Ackermannova funkcia (1928),
    - ▶ univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie.
- ▶ Čiastočne rekurzívne funkcie
  - ▶ Kleeneho prvá veta o rekurzii (veta o pevnom bode).
  - ▶ Kleeneho veta o normálnej forme.
  - ▶ Churchova téza a algoritmicky nerozhodnuteľné problémy.

# Zopakovanie

## Primitívne rekurzívne funkcie

- ▶ Základný vývoj primitívne rekurzívnych funkcií.
- ▶ Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia.
- ▶ Párovacia funkcia a aritmetizácia (Gödelizácia).
- ▶ Vnorená jednoduchá rekurzia:

$$f(0, y) = g(y)$$

$$f(x + 1, y) = h\left(x, f(x, s_1(x, y)), f(x, s_2(x, y, f(x, s_1(x, y))))\right), y).$$

- ▶ Regulárne rekurzívne definície s mierou:

$$f(\vec{x}) = \tau[f; \vec{x}].$$

Podmienka regularity  $\Gamma_{f(\vec{\rho})} \rightarrow \mu[\vec{\rho}] < \mu[\vec{x}]$  pre rekurzívne volanie  $f(\vec{\rho})$  funkcie  $f$  v terme  $\tau$ .

# Zopakovanie

## Primitívne rekurzívne funkcie

► Základné funkcie:

- konštantná funkcia  $Z(x) = 0$ ,
- funkcia nasledovníka  $S(x) = x + 1$ ,
- identity (projekcie):

$$I_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$$

pre každé  $1 \leq i \leq n$ .

► Kompozícia (skladanie) funkcií:

$$f(x_1, \dots, x_n) = h(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)).$$

► Primitívna rekurzia:

$$\begin{aligned} f(0, y_1, \dots, y_n) &= g(y_1, \dots, y_n) \\ f(S(x), y_1, \dots, y_n) &= h(x, f(x, y_1, \dots, y_n), y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

# Zopakovanie

## Explicitné definície

Sú to definície v tvare

$$f(x_1, \dots, x_n) = \tau[x_1, \dots, x_n].$$

## Veta

*Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na explicitné definície.*

## Primitívne rekurzívne definície

Sú to definície v tvare

$$\begin{aligned} f(\vec{y}, 0, \vec{z}) &= \rho[\vec{y}, \vec{z}] \\ f(\vec{y}, x + 1, \vec{z}) &= \tau[\vec{y}, x, f(\vec{y}, x, \vec{z}), \vec{z}]. \end{aligned}$$

## Veta

*Prim. rek. funkcie sú uzavreté na primitívne rekurzívne definície.*

# Zopakovanie

## Príklady primitívne rekurzívnych funkcií

- ▶ Sčítanie  $x + y$ .
- ▶ Násobenie  $x \cdot y$ .
- ▶ Umocňovanie  $x^y$ .
- ▶ Sumačná funkcia

$$\sum_{i=0}^n i = 0 + 1 + 2 + \dots + n.$$

- ▶ Modifikované odčítanie

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y & \text{ak } x \geq y, \\ 0 & \text{ak } x \leq y. \end{cases}$$

# Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

## Charakteristická funkcia predikátu

Charakteristická funkcia  $n$ -árneho predikátu  $P$  je  $n$ -árna funkcia  $P_*$  definovaná predpisom

$$P_*(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{ak platí } P(x_1, \dots, x_n), \\ 0 & \text{ak neplatí } P(x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Notačná konvencia  $x P_* y$  pre binárne predikáty s infixovou notáciou. Napr.  $x =_* y$ ,  $x \leq_* y$ .

## Primitívne rekurzívne predikáty

Predikát je primitívne rekurzívny, ak jeho charakteristická funkcia je primitívne rekurzívna funkcia.



# Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

## Jazyk formúl

Tvrdenia tvoríme z atomických formúl pomocou logických spojok a kvantifikátorov:

|   |                             |
|---|-----------------------------|
| $\neg\varphi$   | (negácia)                   |
| $\varphi \wedge \psi$   | (konjunkcia)                |
| $\varphi \vee \psi$   | (disjunkcia)                |
| $\varphi \rightarrow \psi$  | (implikácia)                |
| $\varphi \leftrightarrow \psi$  | (ekvivalencia)              |
| $\forall x\varphi$  | (univerzálny kvantifikátor) |
| $\exists x\varphi$  | (existenčný kvantifikátor)  |
| $\forall x \leq \tau \varphi \equiv \forall x(x \leq \tau \rightarrow \varphi)$ | (ohraničený kvantifikátor)  |
| $\exists x \leq \tau \varphi \equiv \exists x(x \leq \tau \wedge \varphi)$      | (ohraničený kvantifikátor)  |

Ohraničená formula obsahuje len ohraničené kvantifikátory.

# Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

## Notačné konvencie pri zápise formúl

Od najvyššej priority k najmenšej:

- ▶ kvantifikátory,
- ▶ negácia,
- ▶ konjunkcia,
- ▶ disjunkcia,
- ▶ implikácia a ekvivalencia.

## Príklad

Zadanie formuly v úplnej notácii

$$(\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \leftrightarrow ((\neg\varphi_3) \vee ((\exists x\varphi_4) \wedge \varphi_5))))).$$

Jej skrátенý zápis

$$\varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \leftrightarrow \neg\varphi_3 \vee \exists x\varphi_4 \wedge \varphi_5.$$

# Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

## Explicitné definície predikátov

Sú to definície v tvare

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi[x_1, \dots, x_n].$$

Nás zaujíma hlavne prípad, keď  $\varphi$  je ohraničená formula.

## Príklad

Explicitná definícia predikátu deliteľnosti

$$x \mid y \leftrightarrow \exists z y = x \cdot z.$$

Iná definícia tentokrát s ohraničenou formulou

$$x \mid y \leftrightarrow \exists z \leq y y = x \cdot z.$$

# Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

## Ohraničená minimalizácia

Sú to definície v tvare ( $\varphi$  je ohraničená formula)

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \text{najmenšie číslo } y \leq \tau[x_1, \dots, x_n] \text{ také, že platí} \\ \quad \varphi[x_1, \dots, x_n, y]; \\ 0, \text{ ak také číslo neexistuje.} \end{cases}$$

Skrátený zápis  $f(\vec{x}) = \mu y \leq \tau[\vec{x}] [\varphi[\vec{x}, y]]$ .

## Príklad

Neúplný podiel

$$x \div y = q \leftrightarrow y = 0 \wedge q = 0 \vee y \neq 0 \wedge \exists r (x = q \cdot y + r \wedge r < y).$$

Iná definícia tentokrát ohraničenou minimalizáciou

$$x \div y = \mu q \leq x [x < (q + 1) \cdot y].$$

# Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Diskriminačná funkcia je primitívne rekurzívna

Ternárna diskriminačná funkcia  $D$  je definovaná predpisom

$$D(x, y, z) = v \leftrightarrow x \neq 0 \wedge v = y \vee x = 0 \wedge v = z.$$

Notačná konvencia

$$D(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \equiv \mathbf{if} \ \tau_1 \neq 0 \ \mathbf{then} \ \tau_2 \ \mathbf{else} \ \tau_3$$

$$D(P_*(\vec{\tau}_1), \tau_2, \tau_3) \equiv \mathbf{if} \ P(\vec{\tau}_1) \ \mathbf{then} \ \tau_2 \ \mathbf{else} \ \tau_3.$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie  $D$  plynie z tohoto vyjadrenia

$$D(0, y, z) = z$$

$$D(x + 1, y, z) = y.$$

Je to explicitná definícia s monadickou diskrimináciou.

# Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Rovnosť je primitívne rekurzívny predikát

Pretože  $x = y \leftrightarrow x \dot{-} y + (y \dot{-} x) = 0$ , primitívna rekurzívnosť funkcie  $x =_* y$  plynie z tohoto vyjadrenia

$$(x =_* y) = D(x \dot{-} y + (y \dot{-} x), 0, 1).$$

Boolovské funkcie sú primitívne rekurzívne

Základné boolovské funkcie

$$(\neg_* x) = y \leftrightarrow x \neq 0 \wedge y = 0 \vee x = 0 \wedge y = 1$$

$$(x \wedge_* y) = z \leftrightarrow x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z = 1 \vee (x = 0 \vee y = 0) \wedge z = 0.$$

Primitívna rekurzívnosť bool. funkcií plynie z tohoto vyjadrenia

$$(\neg_* x) = D(x, 0, 1)$$

$$(x \wedge_* y) = D(x, D(y, 1, 0), 0).$$

# Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

## Operátor ohraničenej minimalizácie

Je to definícia v tvare

$$f(x, \vec{y}) = \mu z \leq x [g(z, \vec{y}) = 1].$$

## Veta

*Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na operátor ohraničenej minimalizácie.*

## Dôkaz.

Primitívna rekurzívnosť funkcie  $f$  plynie z tohoto vyjadrenia

$$f(0, \vec{y}) = 0$$
$$f(x + 1, \vec{y}) = \begin{cases} f(x, \vec{y}) & \text{ak } g(f(x, \vec{y}), \vec{y}) = 1, \\ x + 1 & \text{ak } g(f(x, \vec{y}), \vec{y}) \neq 1 \text{ a } g(x + 1, \vec{y}) = 1, \\ 0 & \text{ináč.} \end{cases}$$

# Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

## Veta

*Primitívne rekurzívne predikáty sú uzavreté na explicitné definície predikátov s ohraničenými formulami.*

## Dôkaz.

Explicitná definícia predikátu s ohraničenou formulou:

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi[x_1, \dots, x_n].$$

Primitívna rekurzívnosť predikátu  $P_*$  plynie z tohoto vyjadrenia

$$P_*(x_1, \dots, x_n) = \varphi_*[x_1, \dots, x_n].$$

Tu  $\varphi_*$  je charakteristický term formuly  $\varphi$ :

$$(\varphi \rightarrow \varphi_* = 1) \wedge (\neg\varphi \rightarrow \varphi_* = 0).$$



# Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Konštrukcia  $\varphi_*$  indukzívne podľa štruktúry formuly  $\varphi$

- ▶ Nekvantifikátorová formula

$$(\rho = \tau)_* \equiv (\rho =_* \tau)$$

$$(R(\vec{\tau}))_* \equiv R_*(\vec{\tau})$$

$$(\neg\psi)_* \equiv (\neg_*\psi_*)$$

$$(\psi \wedge \chi)_* \equiv (\psi_* \wedge_* \chi_*).$$

- ▶ Formula z ohraničeným kvantifikátorom

$$(\exists y \leq \tau \psi[y])_* \equiv \psi_* \left[ \mu y \leq \tau [\psi_*[y] = 1] \right].$$

# Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

## Dôsledok

*Nerovnosti sú primitívne rekurzívne predikáty.*

## Dôkaz.

Primitívna rekurzívnosť predikátov plynie z tohoto vyjadrenia

$$x \leq y \leftrightarrow \exists z \leq y \ x = z$$

$$x < y \leftrightarrow y \not\leq x$$

$$x \geq y \leftrightarrow y \leq x$$

$$x > y \leftrightarrow y < x.$$

## Poznámka

Pretože platí ekvivalencia  $x \leq y \leftrightarrow x \div y = 0$ , primitívna rekurzívnosť funkcie  $x \leq_* y$  plynie tiež z tohoto vyjadrenia

$$(x \leq_* y) = D(x \div y, 0, 1).$$

# Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

## Veta

*Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na definície funkcií ohraničenou minimalizáciou.*

## Dôkaz.

Definícia funkcie ohraničenou minimalizáciou:

$$f(\vec{x}) = \mu y \leq \tau[\vec{x}] [\varphi[\vec{x}, y]].$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie  $f$  plynie z tohoto vyjadrenia

$$P(y, \vec{x}) \leftrightarrow \varphi[\vec{x}, y]$$

$$g(z, \vec{x}) = \mu y \leq z [P_*(y, \vec{x}) = 1]$$

$$f(\vec{x}) = g(\tau[\vec{x}], \vec{x}).$$

# Spätaná rekurzia

## Spätaná rekurzia

Sú to definície v tvare

$$f(x, \vec{y}) = \begin{cases} \rho[x, \vec{y}] & \text{ak } x \geq \theta[\vec{y}], \\ \tau[x, f(x+1, \vec{y}), \vec{y}] & \text{ak } x < \theta[\vec{y}]. \end{cases}$$

Je to špeciálny prípad rekurzie s mierou  $\theta[\vec{y}] \dot{-} x$ .

Podmienka regularity:

$$x < \theta[\vec{y}] \rightarrow \theta[\vec{y}] \dot{-} (x+1) < \theta[\vec{y}] \dot{-} x.$$

Zdôvodnenie:  $x < \theta[\vec{y}] \rightarrow x < x+1 \leq \theta[\vec{y}]$ .

## Veta

*Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na spätú rekurziu.*

## Spätaná rekurzia

### Dôkaz vety pre špeciálny prípad

Uvažujme najprv definíciu v tvare

$$f(x, y) = \begin{cases} g(y) & \text{ak } x \geq b(y), \\ h(x, f(x+1, y), y) & \text{ak } x < b(y). \end{cases}$$

Tvrdíme, že existuje p.r. funkcia  $\hat{f}$  taká, že

$$v + x = b(y) \rightarrow \hat{f}(v, y) = f(x, y).$$

Dôkaz:

$$\hat{f}(0, y) = g(y)$$

$$\hat{f}(v+1, y) = h(b(y) \div (v+1), \hat{f}(v, y), y).$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie  $f$  plynie z tohoto vyjadrenia

$$f(x, y) = \hat{f}(b(y) \div x, y).$$

## Spätaná rekurzia

### Dôkaz vety pre obecný prípad

Uvažujme teraz definíciu v tvare

$$f(x, y) = \begin{cases} g(x, y) & \text{ak } x \geq b(y), \\ h(x, f(x+1, y), y) & \text{ak } x < b(y). \end{cases}$$

Tvrdíme, že existuje p.r. funkcia  $\hat{f}$  taká, že

$$v + x = b(y) \rightarrow \hat{f}(v, y) = f(x, y).$$

Dôkaz:

$$\hat{f}(0, y) = g(b(y), y) \quad \hat{f}(v+1, y) = h(b(y) \div (v+1), \hat{f}(v, y), y).$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie  $f$  plynie z tohoto vyjadrenia

$$f(x, y) = \begin{cases} g(x, y) & \text{ak } x \geq b(y), \\ \hat{f}(b(y) \div x, y) & \text{ak } x \leq b(y). \end{cases}$$

# Záver

## 3. cvičenie

- ▶ Výsledky s komentárom nájdete na webe.

## 4. cvičenie

- ▶ Začína hneď po prednáške v miestnosti F1-248.
- ▶ Pracujte samostatne.
- ▶ Úlohy odovzdať najneskôr do 12:00 v pondelok budúci týždeň.

## 5. prednáška

- ▶ Párovacia funkcia a aritmetizácia dátových štruktúr (Gödelizácia).