1-AIN-625 Úvod do matematickej logiky pre programátorov
1-INF-450 Logika pre informatikov

Zimný semester 2011/12

12. prednáška

Ján Komara

Obsah 12. prednášky

Zopakovanie

Cieľ predmetu

- Vybudovať matematické základy deklaratívnych programovacích jazykov

Stručná osnova predmetu

- Primitívne rekurzívne funkcie
  - kódovanie (aritmetizácia) dátových štruktúr
  - regulárne rekurzívne definície s mierou
- Obecne rekurzívne funkcie
  - regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií
- Čiastočne rekurzívne funkcie
  - Kleeneho prvá veta o rekurzii (veta o pevnom bode)
  - Kleeneho veta o normálnej forme
  - rekurzívne nerozhodnuteľné problémy, napr. problém zastavenia
  - Churchova téza

Zopakovanie

Čiastočne rekurzívne funkcie

- Základné funkcie
  - funkcia nasledovníka $\mathrm{S}(x) = x + 1$
  - funkcia predchodcu $\mathrm{P}(x) = x \dot{-} 1$
- Explicitné definície čiastočných funkcií so silnou rovnosťou

$$f(\vec{x}) \simeq \tau[\vec{x}]$$

- Rekurzívne definície čiastočných funkcií so silnou rovnosťou

$$f(\vec{x}) \simeq \tau[f; \vec{x}]$$

Funkcia je rekurzívna, ak je to totálna čiastočne rekurzívna funkcia
Predikát je rekurzívny, ak taká je jeho charakteristická funkcia

Zopakovanie

Veta o normálnej forme (Kleene)

Existuje unárna primitívne rekurzívna funkcia U *a pre každé* $n \geq 1$ *existuje* $(n+2)$*-árny primitívne rekurzívny predikát* T_n *taký, že pre každú n-árnu čiastočne rekurzívnu funkciu f existuje číslo e také, že pre všetky čísla* $\vec{x} \in \mathrm{N}^n$ *platí vzťah:*

$$f(\vec{x}) \simeq \mathrm{U}\,\mu s[\mathrm{T}_n(e, \vec{x}, s)]$$

Idea dôkazu

Neformálny popis predikátu T_n a funkcie U:

- $\mathrm{T}_n(e, \vec{x}, s)$ vtt ak e je kód nejakého programu a s je kód výpočtu tohto programu pre vstupy $\vec{x}$.
- Funkcia $\mathrm{U}(s)$ určí z kódu výpočtu výslednú hodnotu.

Zopakovanie

Rekurzívne indexy

Symbolom $\varphi_e^{(n)}$ označujeme n-árnu čiastočne rekurzívnu funkciu definovanú predpisom

$$\varphi_e^{(n)} = \begin{cases} \lambda_n.\tau & \text{ak } e = \ulcorner \lambda_n.\tau \urcorner \text{ pre nejaké } \lambda_n.\tau, \\ \emptyset^{(n)} & \text{ináč.} \end{cases}$$

Ak $f = \varphi_e^{(n)}$ tak číslo e nazveme rekurzívnym indexom čiastočnej funkcie f. Čísla v tvare $\ulcorner \lambda_n.\tau \urcorner$ sú dobre vytvorené indexy.

Veta

Čiastočná funkcia je rekurzívna vtt má rekurzívny index.

Poznámka

Z dôkazu Kleeneho vety o normálnej forme vyplýva, že

$$\varphi_e^{(n)}(\vec{x}) \simeq \mathrm{U}\,\mu s[\mathrm{T}_n(e, \vec{x}, s)].$$

Zopakovanie

Enumeračná funkcia

Symbolom $\psi^{(n)}$ si označíme $(n+1)$-árnu čiastočnú funkciu definovanú predpisom

$$\psi^{(n)}(e, \vec{x}) \simeq \varphi_e^{(n)}(\vec{x})$$

Veta o enumerácií (Kleene)

Pre každé $n \geq 1$, čiastočná funkcia $\psi^{(n)}$ je čiastočne rekurzívna funkcia, ktorá enumeruje (z opakovaním) triedu n-árnych čiastočne rekurzívnych funkcií

Veta

Zúplnenie enumeračnej funkcie nie je rekurzívna funkcia

Veta

Graf enumeračnej funkcie nie je rekurzívny predikát

Čiastočne rekurzívne funkcie

Primitívna rekurzia čiastočných funkcií

Sú to definície čiastočných funkcií v tvare

$$\begin{aligned} f(0,\vec{y}) &\simeq g(\vec{y}) \\ f(x+1,\vec{y}) &\simeq h\big(x, f(x,\vec{y}), \vec{y}\big) \end{aligned}$$

Primitívna rekurzia pre totálne g, h:

$$\begin{aligned} f(0,\vec{y}) &= g(\vec{y}) \\ f(x+1,\vec{y}) &= h\big(x, f(x,\vec{y}), \vec{y}\big) \end{aligned}$$

je špeciálny prípad operátora primitívnej rekurzie čiastočných funkcií

Veta

Trieda čiastočných rekurzívnych funkcií je uzavretá na operátor primitívnej rekurzie čiastočných funkcií

Čiastočne rekurzívne funkcie

Dôkaz.

Nech g, h sú čiastočne rekurzívne funkcie a

$$
\begin{aligned}
f(0, \vec{y}) &\simeq g(\vec{y}) \\
f(x+1, \vec{y}) &\simeq h\big(x, f(x, \vec{y}), \vec{y}\big)
\end{aligned}
$$

Rekurzívnosť čiastočnej funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$f(x, \vec{y}) \simeq \textbf{if } x \neq 0 \textbf{ then } h\big(x \dot{-} 1, f(x \dot{-} 1, \vec{y}), \vec{y}\big) \textbf{ else } g(\vec{y})$$

Čiastočne rekurzívne funkcie

Minimalizácia čiastočných funkcií

Sú to definície čiastočných funkcií v tvare

$$f(\vec{x}) \simeq y \leftrightarrow g(y,\vec{x}) \simeq 1 \land \forall z < y\big(g(z,\vec{x})\!\downarrow \land\, g(z,\vec{x}) \not\simeq 1\big)$$

Skrátený zápis

$$f(\vec{x}) \simeq \mu y[g(y,\vec{x}) \simeq 1]$$

Neohraničená minimalizácia pre totálne g:

$$f(\vec{x}) \simeq \mu y[g(y,\vec{x}) = 1]$$

je špeciálny prípad operátora minimalizácie čiastočných funkcií

Veta

Trieda čiastočných rekurzívnych funkcií je uzavretá na operátor minimalizácie čiastočných funkcií

Čiastočne rekurzívne funkcie

Minimalizácia čiastočných funkcií

Sú to definície čiastočných funkcií v tvare

$$f(\vec{x}) \simeq y \leftrightarrow g(y, \vec{x}) \simeq 1 \wedge \forall z < y \exists v \big(g(z, \vec{x}) \simeq v \wedge v \neq 1\big)$$

Skrátený zápis

$$f(\vec{x}) \simeq \mu y[g(y, \vec{x}) \simeq 1]$$

Neohraničená minimalizácia pre totálne g:

$$f(\vec{x}) \simeq \mu y[g(y, \vec{x}) = 1]$$

je špeciálny prípad operátora minimalizácie čiastočných funkcií

Veta

Trieda čiastočných rekurzívnych funkcií je uzavretá na operátor minimalizácie čiastočných funkcií

Čiastočne rekurzívne funkcie

Dôkaz.

Nech g je čiastočne rekurzívna funkcia a

$$f(\vec{x}) \simeq \mu y[g(y,\vec{x}) \simeq 1]$$

Rekurzívnosť čiastočnej funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned} h(y,\vec{x}) &\simeq \textbf{if } \big(g(y,\vec{x}) =_* 1\big) \neq 0 \textbf{ then } y \textbf{ else } h(y+1,\vec{x}) \\ f(\vec{x}) &\simeq h(0,\vec{x}) \end{aligned}$$

Korektnosť implementácie plynie z tejto vlastnosti čiastočne rekurzívnej funkcie h:

$$\begin{aligned} h(y,\vec{x}) \simeq z \leftrightarrow y \leq z \wedge g(z,\vec{x}) \simeq 1 \wedge \\ \forall z_1 \big(y \leq z_1 < z \rightarrow g(z_1,\vec{x}){\downarrow} \wedge g(z_1,\vec{x}) \not\simeq 1\big) \end{aligned}$$

Čiastočne μ-rekurzívne funkcie

Definícia triedy čiastočne μ-rekurzívnych funkcií

- Základné funkcie
  - konštantná funkcia $\mathrm{Z}(x) = 0$
  - funkcia nasledovníka $\mathrm{S}(x) = x + 1$
  - identity $\mathrm{I}_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ pre každé $1 \leq i \leq n$
- Kompozícia (skladanie) čiastočných funkcií

$$f(\vec{x}) \simeq h\big(g_1(\vec{x}), \ldots, g_m(\vec{x})\big)$$

- Primitívna rekurzia čiastočných funkcií

$$f(0, \vec{y}) \simeq g(\vec{y}) \qquad f\big(\mathrm{S}(x), \vec{y}\big) \simeq h\big(x, f(x, \vec{y}), \vec{y}\big)$$

- Minimalizácia čiastočných funkcií

$$f(\vec{x}) \simeq \mu y[g(y, \vec{x}) \simeq 1]$$

Predikát je μ-rekurzívny, ak taká je jeho charakteristická funkcia

Čiastočne μ-rekurzívne funkcie

Veta

Trieda μ-rekurzívnych funkcií je primitívne rekurzívne uzavretá trieda funkcií

Dôsledok

- *Každá primitívne rekurzívna funkcia je μ-rekurzívna*
- *Každý primitívne rekurzívny predikát je μ-rekurzívny*
- *μ-rekurzívne predikáty sú uzavreté na explicitné definície predikátov s ohraničenými formulami*
- *μ-rekurzívne funkcie sú uzavreté na definície funkcií ohraničenou minimalizáciou*

Čiastočne μ-rekurzívne funkcie

Charakterizačný problém

Veta

Trieda čiastočne rekurzívnych funkcií je totožná s triedou čiastočne μ-rekurzívnych funkcií

Dôkaz.

Ak f je n-árna čiastočne rekurzívna funkcia, potom existuje číslo e také, že pre všetky čísla $\vec{x} \in \mathrm{N}^n$ platí vzťah:

$$f(\vec{x}) \simeq \mathrm{U}\,\mu s[\mathrm{T}_n(e, \vec{x}, s)]$$

μ-rekurzívnosť čiastočnej funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned} P(s, \vec{x}) &\leftrightarrow \mathrm{T}_n(e, \vec{x}, s) \\ g(\vec{x}) &\simeq \mu s[P_*(s, \vec{x}) \simeq 1] \\ f(\vec{x}) &\simeq \mathrm{U}\,g(\vec{x}) \end{aligned}$$

Opačná inklúzia platí očividne

Church-Turingova téza

Churchova téza (1936)

Trieda intuitívne vypočítateľných funkcií nad oborom $\mathbb{N}$ *je totožná s triedou obecne rekurzívnych funkcií*

Turingova téza (1936-7)

Trieda intuitívne vypočítateľných funkcií nad oborom $\mathbb{N}$ *je totožná s triedou funkcií vypočítateľných na Turingových strojoch*

Modely vypočítateľných funkcií

- λ-definovateľné funkcie [Church]
- (čiastočne) rekurzívne funkcie [Herbrand-Gödel-Kleene]
- Turingove stroje
- (čiastočne) μ-rekurzívne funkcie [Kleene]
- registrové stroje [napr. Minsky]

Nerozhodnuteľné problémy

Problém zastavenia

Aritmetizácia problému zastavenia pre n-árne čiastočne rekurzívne funkcie je $(n+1)$-árny predikát definovaný predpisom

$$\mathrm{W}_e^{(n)}(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi_e^{(n)}(\vec{x})\downarrow$$

Veta

Problém zastavenia pre n-árne čiastočne rekurzívne funkcie je nerozhodnuteľný problém

Dôkaz.

V opačnom prípade by takéto zúplnenie enumeračnej (čiastočnej) funkcie $\psi^{(n)}$ bola rekurzívna funkcia:

$$f(e,\vec{x}) \simeq \begin{cases} \psi^{(n)}(e,\vec{x}) & \text{ak } \varphi_e^{(n)}(\vec{x})\downarrow \\ 0 & \text{ak } \varphi_e^{(n)}(\vec{x})\uparrow \end{cases}$$

Nerozhodnuteľné problémy

Veta

Problém zastavenia pre enumeračnú čiastočnú funkciu $\psi^{(n)}$ je nerozhodnuteľný problém

Dôkaz.

Nech e_n je rekurzívny index čiastočnej funkcie $\psi^{(n)}$. Potom

$$\varphi_e^{(n)}(\vec{x})\downarrow \Leftrightarrow \psi^{(n)}(e,\vec{x})\downarrow \Leftrightarrow \varphi_{e_n}^{(n+1)}(e,\vec{x})\downarrow .$$

Odtiaľ dostaneme

$$\mathrm{W}_e^{(n)}(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi_{e_n}^{(n+1)}(e,\vec{x})\downarrow .$$

Z rozhodnuteľnosti problému zastavenia pre $\psi^{(n)}$ by sme dostali rozhodnuteľnosť všeobecného problému zastavenia.

Polorozhodnuteľné problémy

Čiastočne rekurzívne predikáty

n-árny predikát P je čiastočne rekurzívny, ak existuje n-árna čiastočne rekurzívna funkcia f taká, že

$$P(\vec{x}) \leftrightarrow f(\vec{x})\downarrow$$

Príklady

- Každý n-árny rekurzívny predikát P je čiastočne rekurzívny:

$$f(\vec{x}) \simeq \textbf{if } P(\vec{x}) \textbf{ then } 1 \textbf{ else } \emptyset^{(n)}(\vec{x})$$

- Aritmetizácia problému zastavenia pre n-árne čiastočne rekurzívne funkcie je $(n+1)$-árny čiastočne rekurzívny predikát:

$$\mathrm{W}_e^{(n)}(\vec{x}) \leftrightarrow \psi^{(n)}(e, \vec{x})\downarrow$$

Polorozhodnuteľné problémy

Čiastočne rekurzívne predikáty

n-árny predikát P je čiastočne rekurzívny, ak existuje n-árna čiastočne rekurzívna funkcia f taká, že

$$P(\vec{x}) \leftrightarrow f(\vec{x})\downarrow$$

Príklady

- Každý n-árny rekurzívny predikát P je čiastočne rekurzívny:

$$f(\vec{x}) \simeq \mu y[P(\vec{x})]$$

- Aritmetizácia problému zastavenia pre n-árne čiastočne rekurzívne funkcie je $(n+1)$-árny čiastočne rekurzívny predikát:

$$\mathrm{W}_e^{(n)}(\vec{x}) \leftrightarrow \psi^{(n)}(e, \vec{x})\downarrow$$

Polorozhodnuteľné problémy

Veta o normálnej forme (Kleene)

Pre každý n-árny čiastočne rekurzívny predikát P existuje číslo e také, že pre všetky čísla $\vec{x} \in \mathrm{N}^n$ platí vzťah:

$$P(\vec{x}) \leftrightarrow \exists s\, \mathrm{T}_n(e, \vec{x}, s)$$

Dôkaz.

Nech f je n-árna čiastočne rekurzívna funkcia taká, že

$$P(\vec{x}) \leftrightarrow f(\vec{x})\downarrow$$

Z Kleeneho vety o normálnej forme pre n-árne čiastočne rekurzívne funkcie plynie, že existuje číslo e také, že

$$f(\vec{x}) \simeq \mathrm{U}\, \mu s[\mathrm{T}_n(e, \vec{x}, s)]$$

Polorozhodnuteľné problémy

Veta o normálnej forme (Kleene)

Pre každý n-árny čiastočne rekurzívny predikát P existuje číslo e také, že pre všetky čísla $\vec{x} \in \mathrm{N}^n$ platí vzťah:

$$P(\vec{x}) \leftrightarrow \exists s \, \mathrm{T}_n(e, \vec{x}, s)$$

Dôkaz.

Nech f je n-árna čiastočne rekurzívna funkcia taká, že

$$P(\vec{x}) \leftrightarrow f(\vec{x})\downarrow$$

Z Kleeneho vety o normálnej forme pre n-árne čiastočne rekurzívne funkcie plynie, že existuje číslo e také, že

$$f(\vec{x})\downarrow \leftrightarrow \exists s \, \mathrm{T}_n(e, \vec{x}, s)$$

Polorozhodnuteľné problémy

Veta (Post)

Predikát je rekurzívny vtt ak on a jeho negácia sú čiastočne rekurzívne predikáty

Dôkaz.

Nech n-árny predikát P a jeho negácia sú čiastočne rekurzívne.
Z vety o normálnej forme plynie, že existujú čísla e_1, e_2 také, že

$$
\begin{aligned}
P(\vec{x}) &\leftrightarrow \exists s\, \mathrm{T}_n(e_1, \vec{x}, s) \\
\neg P(\vec{x}) &\leftrightarrow \exists s\, \mathrm{T}_n(e_2, \vec{x}, s)
\end{aligned}
$$

Regulárna minimalizácia definuje n-árnu rekurzívnu funkciu f:

$$f(\vec{x}) = \mu s[\mathrm{T}_n(e_1, \vec{x}, s) \vee \mathrm{T}_n(e_2, \vec{x}, s)]$$

Rekurzívnosť predikátu P plynie z tohoto vyjadrenia

$$P(\vec{x}) \leftrightarrow \mathrm{T}_n\big(e_1, \vec{x}, f(\vec{x})\big)$$

Polorozhodnuteľné problémy

Projekcie rekurzívnych predikátov

Nech R je $(n+1)$-árny rekurzívny predikát a nech P je n-árny predikát definovaný predpisom

$$P(\vec{x}) \leftrightarrow \exists y\, R(y, \vec{x})$$

Vravíme, že predikát P vznikol (existenčnou) projekciou rekurzívneho predikátu R

Rekurzívne spočítateľné predikáty

n-árny predikát P je rekurzívne spočítateľný, ak jeho obor pravdivosti je prázdna množina alebo ak existuje unárna rekurzívna funkcia f taká, že

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists y\, f(y) = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$$

Vravíme, že funkcia f enumeruje predikát P

Polorozhodnuteľné problémy

Projekcie rekurzívnych predikátov

Nech R je $(n+1)$-árny rekurzívny predikát a nech P je n-árny predikát definovaný predpisom

$$P(\vec{x}) \leftrightarrow \exists y\, R(y, \vec{x})$$

Vravíme, že predikát P vznikol (existenčnou) projekciou rekurzívneho predikátu R

Rekurzívne spočítateľné predikáty

n-árny predikát P je rekurzívne spočítateľný, ak jeho obor pravdivosti je prázdna množina alebo ak existuje unárna rekurzívna funkcia f taká, že

$$P(\vec{x}) \leftrightarrow \exists y\, f(y) = \langle \vec{x} \rangle$$

Vravíme, že funkcia f enumeruje predikát P

Polorozhodnuteľné problémy

Veta

Nech P je n-árny predikát. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- *P je čiastočne rekurzívny predikát.*
- *P je projekcia rekurzívneho predikátu.*
- *P je rekurzívne spočítateľný predikát.*

Dôkaz.

Znenie vety plynie z nasledujúcich troch pomocných tvrdení

Polorozhodnuteľné problémy

Lema

Každý čiastočne rekurzívny predikát je projekciou rekurzívneho predikátu

Dôkaz.

Nech P je n-árny čiastočne rekurzívny predikát. Z Kleeneho vety o normálnej forme plynie, že existuje číslo e také, že

$$P(\vec{x}) \leftrightarrow \exists s\, \mathrm{T}_n(e, \vec{x}, s).$$

Nasledujúci vzťah definuje $(n+1)$-árny rekurzívny predikát R:

$$R(s, \vec{x}) \leftrightarrow \mathrm{T}_n(e, \vec{x}, s).$$

Predikát P je tak projekciou rekurzívneho predikátu

$$P(\vec{x}) \leftrightarrow \exists s\, R(s, \vec{x}).$$

Polorozhodnuteľné problémy

Lema

Každá projekcia rekurzívneho predikátu je rekurzívne spočítateľný predikát

Dôkaz.

Nech R je $(n+1)$-árny rekurzívny predikát a nech P:

$$P(\vec{x}) \leftrightarrow \exists y\, R(y, \vec{x})$$

je predikát, ktorý platí pre $\vec{a} \in \mathrm{N}^n$. Potom f:

$$f(z) = \begin{cases} \langle \vec{x} \rangle & \text{ak } z = \langle y, \vec{x} \rangle \text{ a } R(y, \vec{x}) \text{ pre nejaké } y, \vec{x} \\ \langle \vec{a} \rangle & \text{ináč} \end{cases}$$

je unárna rekurzívna funkcia, ktorá enumeruje predikát P:

$$P(\vec{x}) \leftrightarrow \exists z\, f(z) = \langle \vec{x} \rangle.$$

Polorozhodnuteľné problémy

Lema

Každý rekurzívne spočítateľný predikát je čiastočne rekurzívny predikát

Dôkaz.

Nech f je unárna rekurzívna funkcia, ktorá enumeruje n-árny predikát P:

$$P(\vec{x}) \leftrightarrow \exists y\, f(y) = \langle \vec{x} \rangle$$

Potom neohraničená minimalizácia

$$g(\vec{x}) \simeq \mu y[f(y) = \langle \vec{x} \rangle]$$

definuje čiastočne rekurzívnu funkcia g takú, že

$$P(\vec{x}) \leftrightarrow g(\vec{x})\downarrow$$

Polorozhodnuteľné problémy

Uniformný problém zastavenia

Aritmetizácia uniformného problému zastavenia pre n-árne čiastočne rekurzívne funkcie je unárny predikát definovaný predpisom

$$Tot_n(e) \leftrightarrow \forall \vec{x}\, \varphi_e^{(n)}(\vec{x})\downarrow$$

Veta

Uniformný problém zastavenia pre n-árne čiastočne rekurzívne funkcie nie je ani polorozhodnuteľný problém

Polorozhodnuteľné problémy

Dôkaz pre $n = 1$.

Sporom. Predpokladajme. že predikát Tot je čiastočne rekurzívny. Potom existuje unárna rekurzívna funkcia k, ktorá ho enumeruje:

$$Tot(e) \leftrightarrow \exists x\, k(x) = e.$$

Nasledujúci vzťah definuje unárnu čiastočne rekurzívnu funkciu f:

$$f(x) \simeq \psi\big(k(x), x\big) + 1 \ \big(\simeq \varphi_{k(x)}(x) + 1\big). \tag{1}$$

Pretože $\varphi_{k(x)}(x)\downarrow$, f je totálna. Existujú preto čísla e_0, x_0 také, že

$$\forall x\, \psi(e_0, x) \simeq f(x) \tag{2}$$
$$e_0 = k(x_0). \tag{3}$$

Postupnými úpravami odvodíme spor:

$$f(x_0) \overset{(1)}{\simeq} \psi(k(x_0), x_0) + 1 \overset{(3)}{\simeq} \psi(e_0, x_0) + 1 \overset{(2)}{\simeq} f(x_0) + 1.$$

Programming Language

Pattern Matching with Single-valued Formulas

Single-valued formula $\varphi[\vec{x}; \vec{y}]$ satisfies uniqueness condition

$$\Gamma[\vec{x}] \to \varphi[\vec{x}; \vec{y}] \land \varphi[\vec{x}; \vec{z}] \to \bigwedge_{i=1}^{m} y_i = z_i.$$

$\vec{x}$ and $\vec{y}$ are the input and output variables of φ. Γ is the guard, Characteristic term $\chi[\vec{x}]$ for φ is an $0-1$-term s.t.

$$\Gamma[\vec{x}] \to \exists \vec{y}\, \varphi[\vec{x}; \vec{y}] \leftrightarrow \chi[\vec{x}] = 1.$$

Witnessing terms $\vec{\omega}[\vec{x}]$ for the output variables:

$$\Gamma[\vec{x}] \to \exists \vec{y}\, \varphi[\vec{x}; \vec{y}] \leftrightarrow \varphi\big[\vec{x}; \vec{\omega}[\vec{x}]\big].$$

We have

$$\Gamma[\vec{x}] \to \varphi[\vec{x}; \vec{y}] \leftrightarrow \chi[\vec{x}] = 1 \land \bigwedge_{i=1}^{m} \omega_i[\vec{x}] = y_i.$$

Programming Language

Case Discrimination Terms

Conditional expression guarded with $\Gamma[\vec{x}]$:

case
$\varphi_1[\vec{x};\vec{y}_1] \Rightarrow \rho_1[\vec{x},\vec{y}_1]$
$\vdots$
$\varphi_m[\vec{x};\vec{y}_m] \Rightarrow \rho_m[\vec{x},\vec{y}_m]$
end

case
$\chi_1[\vec{x}] = 1 \wedge \vec{\omega}_1 = \vec{y}_1 \Rightarrow \rho_1[\vec{x},\vec{y}_1]$
$\vdots$
$\chi_m[\vec{x}] = 1 \wedge \vec{\omega}_m = \vec{y}_m \Rightarrow \rho_m[\vec{x},\vec{y}_m]$
end.

Discrimination condition (completeness and pairwise disjointness):

$$\Gamma[\vec{x}] \rightarrow \bigvee_{i=1}^{m} \exists \vec{y}_i\, \varphi_i[\vec{x};\vec{y}_i] \vee \bigwedge_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{m} \neg\big(\exists \vec{y}_i\, \varphi_i[\vec{x};\vec{y}_i] \wedge \exists \vec{y}_j\, \varphi_j[\vec{x};\vec{y}_j]\big).$$

Full unabbreviated notation:

$$\mathcal{D}^{\vec{\omega}_1,\ldots,\vec{\omega}_m}_{\chi_1,\ldots,\chi_m}(\varphi_1[\vec{x};\vec{y}_1], \rho_1[\vec{x},\vec{y}_1], \ldots, \varphi_m[\vec{x};\vec{y}_m], \rho_m[\vec{x},\vec{y}_m]).$$

Programming Language

Regular Programs

Properties of total functions with preconditions:

$$\varphi[\vec{x}] \rightarrow f(\vec{x}) = \tau[f; \vec{x}].$$

Conditions of regularity: all recursive applications decrease in a well-founded relation $\prec$:

$$\varphi[\vec{x}] \wedge \Gamma_{f(\vec{\rho})} \rightarrow \vec{\rho} \prec \vec{x} \wedge \varphi[\vec{\rho}]$$

for each recursive application of $f(\vec{\rho})$ guarded by $\Gamma_{f(\vec{\rho})}$ in τ.

Regular Recursive Definitions

Functional equations of the form

$$f(\vec{x}) = \tau[f; \vec{x}].$$

Conditions of regularity

$$\Gamma_{f(\vec{\rho})} \rightarrow \vec{\rho} \prec \vec{x}$$

must hold for f defined by

$$f(\vec{x}) = \tau\left[[f]^{\prec}_{\vec{x}}; \vec{x}\right].$$

Here, the $[f]^{\prec}_{\vec{x}}$ is the restriction of f:

$$[f]^{\prec}_{\vec{x}}(\vec{y}) \equiv \textbf{if } \vec{y} \prec \vec{x} \textbf{ then } f(\vec{y}) \textbf{ else } 0.$$

Interpreter for a programming language $\mathcal{L}$

Let M describe a single computation step of $\mathcal{L}$ and P its final configuration. Interpreter for $\mathcal{L}$ is the unlimited iteration of M s.t.

$$M^*(x) = \begin{cases} M^k(x) & \text{if } P\, M^k(x) \text{ and } k \text{ is the least such number,} \\ 0 & \text{if there is no such number.} \end{cases}$$

Program for evaluating of the interpreter M^*:

$$\exists k\, PM^k(x) \rightarrow M^*(x) = \textbf{if } P(x) \textbf{ then } x \textbf{ else } M^*\, M(x).$$

Condition of regularity of the program:

$$\exists k\, PM^k(x) \land \neg P(x) \rightarrow t\, M(x) < t(x) \land \exists k\, PM^k M(x),$$

where $t(x) = \mu k\big[\exists l\, PM^l(x) \rightarrow PM^k(x)\big]$ is the number of computation steps from the configuration x.

Interpreter for a programming language $\mathcal{L}$

Let M describe a single computation step of $\mathcal{L}$ and P its final configuration. Interpreter for $\mathcal{L}$ is the unlimited iteration of M s.t.

$$M^*(x) = y \leftrightarrow \exists k\big(Pf^k(x) \land \forall l < k \neg PM^k(x) \land y = M^k(x)\big) \lor \neg\exists k\, PM^k(x) \land y = 0.$$

Program for evaluating of the interpreter M^*:

$$\exists k\, PM^k(x) \rightarrow M^*(x) = \textbf{if } P(x) \textbf{ then } x \textbf{ else } M^*\, M(x).$$

Condition of regularity of the program:

$$\exists k\, PM^k(x) \land \neg P(x) \rightarrow t\, M(x) < t(x) \land \exists k\, PM^k M(x),$$

where $t(x) = \mu k\big[\exists l\, PM^l(x) \rightarrow PM^k(x)\big]$ is the number of computation steps from the configuration x.

Záver

11. cvičenie

- Výsledky s komentárom nájdete na webe

12. cvičenie

- Začína hneď po prednáške v miestnosti I-H3
- Pracujte samostatne
- Úlohy odovzdať najneskôr do 12:00 v pondelok budúci týždeň

Ústna skúška