1-AIN-625 Úvod do matematickej logiky pre programátorov
1-INF-450 Logika pre informatikov

Zimný semester 2011/12
11. prednáška

Ján Komara

Obsah 11. prednášky

Zopakovanie

Cieľ predmetu

- Vybudovať matematické základy deklaratívnych programovacích jazykov

Stručná osnova predmetu

- Primitívne rekurzívne funkcie
  - kódovanie (aritmetizácia) dátových štruktúr
  - regulárne rekurzívne definície s mierou
- Obecne rekurzívne funkcie
  - regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií
- Čiastočne rekurzívne funkcie
  - Kleeneho prvá veta o rekurzii (veta o pevnom bode)
  - Kleeneho veta o normálnej forme
  - rekurzívne nerozhodnuteľné problémy, napr. problém zastavenia
  - Churchova téza

Zopakovanie

Primitívne rekurzívne funkcie (charakterizácia)

Trieda primitívne rekurzívnych funkcií je najmenšia trieda funkcií, ktorá obsahuje funkciu nasledovníka $x + 1$, funkciu predchodcu $x \dot{-} 1$ a je uzavretá na explicitné definície a regulárnu rekurziu s mierou

Obecne rekurzívne funkcie (definícia)

Trieda obecne rekurzívnych funkcií je najmenšia trieda funkcií, ktorá obsahuje funkciu nasledovníka $x + 1$, funkciu predchodcu $x \dot{-} 1$ a je uzavretá na explicitné definície a regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií

Zopakovanie

Veta o pevnom bode (Kleene)

Veta o pevnom bode Funkcionálna rovnica v neznámej f:

$$f(\vec{x}) \simeq \tau[f;\vec{x}]$$

má najmenšie riešenie n-árnu čiastočnú funkciu $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$, ktorá je limitou reťazca $f_0, f_1, f_2, \ldots$ definovaného predpisom

$$f_0 = \emptyset^{(n)}$$
$$f_{i+1}(\vec{x}) \simeq \tau[f_i;\vec{x}].$$

Poznámka

Toto je prvá časť Kleeneho prvej vety o rekurzii. V druhej časti tejto vety sa tvrdí, že najmenšie riešenie funkcionálnej rovnice je vypočítateľné.

Čiastočne rekurzívne funkcie

Definícia triedy čiastočne rekurzívnych funkcií

- Základné funkcie
  - funkcia nasledovníka $\mathrm{S}(x) = x + 1$
  - funkcia predchodcu $\mathrm{P}(x) = x \dot{-} 1$
- Explicitné definície čiastočných funkcií so silnou rovnosťou

$$f(\vec{x}) \simeq \tau[\vec{x}]$$

- Rekurzívne definície čiastočných funkcií so silnou rovnosťou

$$f(\vec{x}) \simeq \tau[f; \vec{x}]$$

Funkcia je rekurzívna, ak je to totálna čiastočne rekurzívna funkcia
Predikát je rekurzívny, ak taká je jeho charakteristická funkcia

Čiastočne rekurzívne funkcie

Veta

Trieda rekurzívnych funkcií je obecne rekurzívne uzavretá trieda funkcií

Dôsledok

- *Každá obecne rekurzívna funkcia je rekurzívna*
- *Každý obecne rekurzívny predikát je rekurzívny*
- *Trieda rekurzívnych funkcií je primitívne rekurzívne uzavretá trieda funkcií*
- *Rekurzívne predikáty sú uzavreté na explicitné definície predikátov s ohraničenými formulami*
- *Rekurzívne funkcie sú uzavreté na definície funkcií ohraničenou minimalizáciou*
- *Rekurzívne funkcie sú uzavreté na definície funkcií regulárnou minimalizáciou*

Čiastočne rekurzívne funkcie

Neohraničená minimalizácia

Sú to definície čiastočných funkcií v tvare

$$f(\vec{x}) \simeq y \leftrightarrow \varphi[\vec{x}, y] \land \forall z < y\, \neg\varphi[\vec{x}, y],$$

kde φ je ohraničená formula. Skrátený zápis:

$$f(\vec{x}) \simeq \mu y \big[\varphi[\vec{x}, y]\big].$$

Regulárna minimalizácia

$$f(\vec{x}) = \mu y \big[\varphi[\vec{x}, y]\big] \qquad \text{ak } \forall \vec{x} \exists y \varphi[\vec{x}, y]$$

je špeciálny prípad neohraničenej minimalizácie.

Veta

Trieda čiastočných rekurzívnych funkcií je uzavretá na definície čiastočných funkcií neohraničenou minimalizáciou.

Čiastočne rekurzívne funkcie

Dôkaz.

V odvodení f použijeme túto čiastočne rekurzívnu funkciu:

$$g(y, \vec{x}) \simeq \begin{cases} y & \text{ak platí } \varphi[\vec{x}, y] \\ g(y+1, \vec{x}) & \text{ak neplatí } \varphi[\vec{x}, y] \end{cases}$$

Rekurzívnosť čiastočnej funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned} P(\vec{x}, y) &\leftrightarrow \varphi[\vec{x}, y] \\ g(y, \vec{x}) &\simeq \textbf{if } \big(P_*(\vec{x}, y) =_* 1\big) \neq 0 \textbf{ then } y \textbf{ else } g(y+1, \vec{x}) \\ f(\vec{x}) &\simeq g(0, \vec{x}) \end{aligned}$$

Korektnosť implementácie plynie z tejto vlastnosti čiastočne rekurzívnej funkcie g:

$$g(y, \vec{x}) \simeq z \leftrightarrow y \leq z \land \varphi[\vec{x}, z] \land \forall z_1 \big(y \leq z_1 < z \rightarrow \neg\varphi[\vec{x}, z_1]\big)$$

Kleeneho veta o normálnej forme

Veta o normálnej forme (Kleene)

Existuje unárna primitívne rekurzívna funkcia U *a pre každé* $n \geq 1$ *existuje* $(n+2)$*-árny primitívne rekurzívny predikát* T_n *taký, že pre každú* n*-árnu čiastočne rekurzívnu funkciu* f *existuje číslo* e *také, že pre všetky čísla* $\vec{x} \in \mathrm{N}^n$ *platí vzťah:*

$$f(\vec{x}) \simeq \mathrm{U}\, \mu s[\mathrm{T}_n(e, \vec{x}, s)]$$

Poznámka

Ak čiastočne rekurzívna funkcia f je totálna, potom minimalizácia vo výraze na pravej strane rovnosti je regulárna, t.j.

$$\forall \vec{x} \exists s\, \mathrm{T}_n(e, \vec{x}, s)$$

V takomto prípade platí takýto vzťah:

$$f(\vec{x}) = \mathrm{U}\, \mu s[\mathrm{T}_n(e, \vec{x}, s)]$$

Kleeneho veta o normálnej forme

Idea dôkazu

Neformálny popis predikátu T_n a funkcie U:

- Kleeneho predikát T_n má túto základnú vlastnosť:

  $\mathrm{T}_n(e, x_1, \ldots, x_n, s)$ *vtt ak e je kód programu a s je kód výpočtu tohoto programu pre vstupy* $x_1, \ldots, x_n$.

  Tu programom rozumieme čiastočne rekurzívne odvodenie nejakej čiastočnej funkcie a výpočtom proces vyhodnotenia tejto čiastočnej rekurzívnej funkcie.
- Funkcia $\mathrm{U}(s)$ určí z kódu výpočtovej postupnosti výslednú hodnotu.

Ukážeme, že Kleeneho predikát T_n i funkciu U môžeme zvoliť ako primitívne rekurzívne.

Kleeneho veta o normálnej forme

Rekurzívne termy a funkčné symboly

Trieda rekurzívnych termov a funkčných symbolov:

- premenné $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ a konštanta 0 sú rekurzívne termy
- ak τ je rekurzívny term, potom aplikácie $\mathsf{S}(\tau)$ a $\mathsf{P}(\tau)$ sú rekurzívne termy
- ak τ_1, τ_2, τ_3 sú rekurzívne termy, potom aplikácia $\mathsf{D}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ je rekurzívny term
- ak $\tau_1, \ldots, \tau_n$ sú rekurzívne termy, potom aplikácia $\mathfrak{f}_n(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ je rekurzívny term
- ak $\rho_1, \ldots, \rho_n$ sú rekurzívne termy a τ je rekurzívny term v premenných $x_1, \ldots, x_n$ a funkčnej premennej $\mathfrak{f}_n$, potom aplikácia $(\lambda_n.\tau)(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ je rekurzívny term

Definovaný rekurzívny funkčný symbol $\lambda_n.\tau[\mathfrak{f}_n; x_1, \ldots, x_n]$ interpretujeme ako čiastočnú funkciu f definovanú rovnicou

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \ldots, x_n]$$

Kleeneho veta o normálnej forme

Výpočtový model (jeden krok výpočtu)

Notačná konvencia pre monadické numerály

$$\underline{x_1, \ldots, x_n} \equiv \underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n} \equiv \overbrace{\mathsf{S} \ldots \mathsf{S}}^{x_1\text{-krát}}(0), \ldots, \overbrace{\mathsf{S} \ldots \mathsf{S}}^{x_n\text{-krát}}(0)$$

Jeden krok výpočtu $\tau \rhd_1 \rho$ spočíva v nájdení najľavejšieho redexu v uzavretom rekurzívnom terme τ a jeho nahradením kontrakciou podľa nasledujúcich pravidiel

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(\underline{x}) &\rhd_1 \underline{x \dot{-} 1} \\
\mathsf{D}(\underline{0}, \tau_2, \tau_3) &\rhd_1 \tau_3 \\
\mathsf{D}(\underline{x+1}, \tau_2, \tau_3) &\rhd_1 \tau_2 \\
(\lambda_n.\tau[\mathfrak{f}_n; \vec{x}])(\underline{\vec{x}}) &\rhd_1 \tau[\lambda_n.\tau; \underline{\vec{x}}]
\end{aligned}$$

Tak dostaneme nový uzavretý rekurzívny term ρ

Kleeneho veta o normálnej forme

Výpočtový model (viac krokov výpočtu)

Označenie:

- $\tau_1 \rhd_k \tau_2$, ak výraz τ_1 sa redukuje do výrazu τ_2 po $k \geq 0$ krokoch. To znamená, že existujú uzavreté rekurzívne termy $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_k$ také, že

$$\tau_1 \equiv \rho_0 \rhd_1 \rho_1 \rhd_1 \cdots \rhd_1 \rho_k \equiv \tau_2.$$

- $\tau_1 \rhd \tau_2$, ak $\tau_1 \rhd_k \tau_2$ pre nejaké k.
- ak $\tau \rhd \underline{x}$, tak vravíme, že výpočet skončil s výsledkom x.

Veta (Ekvivalentnosť definičnej a výpočtovej sémantiky)

Platí:

$$(\lambda_n.\tau)(\vec{x}) \simeq y \leftrightarrow (\lambda_n.\tau)(\underline{\vec{x}}) \rhd \underline{y}.$$

Kleeneho veta o normálnej forme

Aritmetizácia rekurzívnych termov a funkčných symbolov

Číslo $\ulcorner \tau \urcorner$ resp. $\ulcorner f \urcorner$ je kódom termu resp. funkčného symbolu:

$$
\begin{aligned}
\ulcorner x_i \urcorner &= \boldsymbol{x}_i \\
\ulcorner 0 \urcorner &= \boldsymbol{0} \\
\ulcorner \mathsf{S}(\tau) \urcorner &= \boldsymbol{S}(\ulcorner \tau \urcorner) \\
\ulcorner \mathsf{P}(\tau) \urcorner &= \boldsymbol{P}(\ulcorner \tau \urcorner) \\
\ulcorner \mathsf{D}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \urcorner &= \boldsymbol{D}(\ulcorner \tau_1 \urcorner, \ulcorner \tau_2 \urcorner, \ulcorner \tau_3 \urcorner) \\
\ulcorner f(\tau_1, \ldots, \tau_n) \urcorner &= \ulcorner f \urcorner \boldsymbol{[} \langle \ulcorner \tau_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner \tau_k \urcorner, 0 \rangle \boldsymbol{]} \bullet \ulcorner \tau_{k+1} \urcorner \bullet \cdots \bullet \ulcorner \tau_n \urcorner \\
&\quad \text{kde } k \text{ je najväčšie prirodzené číslo také,} \\
&\quad \text{že všetky termy } \tau_1, \ldots, \tau_k \text{ sú numerály} \\
\ulcorner \mathfrak{f}_n \urcorner &= \boldsymbol{f}_n \\
\ulcorner \lambda_n . \tau \urcorner &= \boldsymbol{\lambda}_n \boldsymbol{.} \ulcorner \tau \urcorner
\end{aligned}
$$

Pripomíname, že $t_1 \bullet t_2 \bullet t_3 \equiv (t_1 \bullet t_2) \bullet t_3$

Kleeneho veta o normálnej forme

Aritmetizácia rekurzívnych termov

Existuje ternárny primitívne rekurzívny predikát $Tm(n, t, rs)$:

pre ľubovoľné rekurzívne termy $\rho_1, \ldots, \rho_k$ *v* $\mathfrak{f}_n, x_1, \ldots, x_n$

$$Tm(n, t, \langle \ulcorner \rho_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner \rho_k \urcorner, 0 \rangle)$$

vtt ak existuje rekurzívny term τ *v* $\mathfrak{f}_n, x_1, \ldots, x_n$ *taký, že*

$$\ulcorner \tau \urcorner = t \bullet \ulcorner \rho_1 \urcorner \bullet \cdots \bullet \ulcorner \rho_k \urcorner$$

Predikát $Tm(n, t, rs)$ je definovaný štrukturálnou rekurziou podľa termu t so substitúciou v parametroch n a rs

Primitívne rekurzívny predikát $Ctm(t)$ platí, ak číslo t je kódom nejakého uzavretého rekurzívneho termu:

$$Ctm(t) \leftrightarrow Tm(0, t, 0)$$

Kleeneho veta o normálnej forme

Aritmetizácia rekurzívnych funkčných symbolov

Primitívne rekurzívny predikát $Rf(n, e)$ platí, ak číslo e je kódom nejakého n-árneho definovaného rekurzívneho funkčného symbolu:

$$Rf(n, e) \leftrightarrow n \geq 1 \land \exists t \leq e\big(e = \boldsymbol{\lambda}_n\boldsymbol{.}\, t \land Tm(n, t, 0)\big).$$

Poznámka

Ukážeme, že platí

$$(\lambda_n.\tau)(\vec{x}) \simeq \mathrm{U}\, \mu s[\mathrm{T}_n(\ulcorner \lambda_n.\tau \urcorner, \vec{x}, s)]$$

Kleeneho veta o normálnej forme

Aritmetizácia funkčnej aplikácie

Špecifikácia binárnej *aplikačnej* funkcie $e\mathbf{(}ts\mathbf{)}$:

$$\ulcorner f(\tau_1, \ldots, \tau_n)\urcorner = \ulcorner f\urcorner\mathbf{(}\langle\ulcorner\tau_1\urcorner, \ldots, \ulcorner\tau_n\urcorner\rangle\mathbf{)}$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie plynie z tohoto vyjadrenia

$$e\mathbf{(}ts\mathbf{)} = e\mathbf{[}0\mathbf{]}\,\underline{\bullet}_{Ar(e)}\; ts$$

V definícii sú použité tieto pomocné primitívne rekurzívne funkcie:

- Funkcia $Ar(e)$ je taká, že $Ar(\ulcorner f\urcorner) = n$ pre n-árny rekurzívny funkčný symbol f
- *Iterácia* kontrakčnej funkcie je ternárna funkcia $t\,\underline{\bullet}_n\, rs$ taká, že

  $$t\,\underline{\bullet}_n\,\langle r_1, \ldots, r_n\rangle = t\,\underline{\bullet}\, r_1\,\underline{\bullet}\cdots\underline{\bullet}\, r_n$$

  Funkcia $t\,\underline{\bullet}_n\, rs$ je definovaná primitívnou rekurziou podľa n so substitúciou v parametri rs

Kleeneho veta o normálnej forme

Aritmetizácia redukčnej relácie

Binárny primitívne rekurzívny predikát $t \rhd_1^\bullet r$ je aritmetizáciou jednokrokovej redukčnej relácie $\tau \rhd_1 \rho$:

> *$t \rhd_1^\bullet r$ vtt existujú uzavreté rekurzívne termý τ, ρ také, že $t = \ulcorner \tau \urcorner$, $r = \ulcorner \rho \urcorner$ a $\tau \rhd_1 \rho$*

Primitívna rekurzívnosť predikátu plynie z tohoto vyjadrenia

$$t \rhd_1^\bullet r \leftrightarrow Ctm(t) \land \neg Nm(t) \land Ctm(r) \land Rd(t) = r$$

Tu $Rd(t)$ je unárna primitívne rekurzívna funkcia taká, že platí:

$$Rd(\ulcorner \underline{x} \urcorner) = \ulcorner \underline{x} \urcorner$$

$$\text{ak } \tau \rhd_1 \rho\text{, potom } Rd(\ulcorner \tau \urcorner) = \ulcorner \rho \urcorner$$

Kleeneho veta o normálnej forme

Kleeneho predikát

Primitívne rekurzívny predikát $\mathit{Computation}(s)$ platí, ak číslo s je kódom (ukončenej) výpočtovej postupnosti:

$$\begin{gathered}\mathit{Computation}(s) \leftrightarrow\ s \neq 0 \wedge \forall i < L(s) \dot{-} 1\ (s)_i \rhd_1^{\bullet} (s)_{i+1} \wedge \\ \wedge\, \mathit{Nm}\,(s)_{L(s)\dot{-}1}\end{gathered}$$

Primitívne rekurzívna funkcia $\mathrm{U}(s)$ vyberie z výpočtovej postupnosti s výslednú hodnotu:

$$\mathrm{U}(s) = \mathit{Dc}\big((s)_{L(s)\dot{-}1}\big)$$

Kleeneho predikát T_n je $(n{+}2)$-árny primitívne rekurzívny predikát definovaný explicitne predpisom

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_n(e, x_1, \ldots, x_n, s) \leftrightarrow\ & \mathit{Rf}\,(n, e) \wedge \mathit{Computation}(s) \wedge \\ & \wedge\, (s)_0 = e\boldsymbol{(}\ulcorner \underline{x_1} \urcorner, \ldots, \ulcorner \underline{x_n} \urcorner\boldsymbol{)}\end{aligned}$$

Kleeneho veta o normálnej forme

Veta o normálnej forme (Kleene)

Existuje unárna primitívne rekurzívna funkcia U *a pre každé* $n \geq 1$ *existuje* $(n+2)$*-árny primitívne rekurzívny predikát* T_n *taký, že pre každú* n*-árnu čiastočne rekurzívnu funkciu* f *existuje číslo* e *také, že pre všetky čísla* $\vec{x} \in \mathrm{N}^n$ *platí vzťah:*

$$f(\vec{x}) \simeq \mathrm{U}\,\mu s[\mathrm{T}_n(e, \vec{x}, s)]$$

Poznámka

Ak čiastočne rekurzívna funkcia f je totálna, potom minimalizácia vo výraze na pravej strane rovnosti je regulárna, t.j.

$$\forall \vec{x} \exists s\, \mathrm{T}_n(e, \vec{x}, s)$$

V takomto prípade platí takýto vzťah:

$$f(\vec{x}) = \mathrm{U}\,\mu s[\mathrm{T}_n(e, \vec{x}, s)]$$

Kleeneho veta o normálnej forme

Veta

Každá rekurzívna funkcia je obecne rekurzívna

Dôkaz.

Ak f je n-árna rekurzívna funkcia, potom existuje číslo e také, že

$$f(\vec{x}) = \mathrm{U}\,\mu s[\mathrm{T}_n(e, \vec{x}, s)]$$

Minimalizácia vo výraze na pravej strane rovnosti je regulárna:

$$\forall \vec{x} \exists s\, \mathrm{T}_n(e, \vec{x}, s)$$

Obecná rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned} g(\vec{x}) &= \mu s[\mathrm{T}_n(e, \vec{x}, s)] \\ f(\vec{x}) &= \mathrm{U}\, g(\vec{x}) \end{aligned}$$

Rekurzívne indexy

Rekurzívne indexy

Symbolom $\varphi_e^{(n)}$ označujeme n-árnu čiastočne rekurzívnu funkciu definovanú predpisom

$$\varphi_e^{(n)} = \begin{cases} \lambda_n.\tau & \text{ak } e = \ulcorner \lambda_n.\tau \urcorner \text{ pre nejaké } \lambda_n.\tau, \\ \emptyset^{(n)} & \text{ináč.} \end{cases}$$

Ak $f = \varphi_e^{(n)}$ tak číslo e nazveme rekurzívnym indexom čiastočnej funkcie f. Čísla v tvare $\ulcorner \lambda_n.\tau \urcorner$ sú dobre vytvorené indexy.

Veta

Čiastočná funkcia je rekurzívna vtt má rekurzívny index.

Poznámka

Z dôkazu Kleeneho vety o normálnej forme vyplýva, že

$$\varphi_e^{(n)}(\vec{x}) \simeq \mathrm{U}\, \mu s[\mathrm{T}_n(e, \vec{x}, s)].$$

Rekurzívne indexy

Dobre vytvorené rekurzívne indexy

Binárna funkcia $e^{(n)}$ zoberie index e nejakej n-árnej čiastočne rekurzívnej funkcie a vráti dobre vytvorený index tej istej čiastočnej funkcie:

$$Rf\left(n, e^{(n)}\right)$$

$$\varphi^{(n)}_{e^{(n)}}(\vec{x}) \simeq \varphi^{(n)}_{e}(\vec{x})$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie plynie z tohoto vyjadrenia

$$e^{(n)} = \begin{cases} e & \text{ak } e \text{ je dobre vytvorený rekurzívny index} \\ & n\text{-árnej čiastočne rekurzívnej funkcie} \\ \ulcorner \emptyset^{(n)} \urcorner & \text{ináč} \end{cases}$$

Rekurzívne indexy

Parametrická funkcia

Binárna funkcia e/x zoberie index e nejakej binárnej čiastočne rekurzívnej funkcie f a číslo x, a vráti index unárnej čiastočne rekurzívnej funkcie $g(y) \simeq f(x, y)$, t.j.

$$Rf(2, e) \to Rf(1, e/x)$$

$$\varphi_{e/x}(y) \simeq \varphi_e^{(2)}(x, y)$$

Primitívna rekurzívnosť parametrickej funkcie plynie z tohoto vyjadrenia

$$e/x = \lambda_1 . e^{(2)}\boldsymbol{(}\langle \ulcorner \underline{x} \urcorner, \boldsymbol{x_1} \rangle\boldsymbol{)}$$

Enumeračná funkcia

Čiastočná enumeračná funkcia

Symbolom $\psi^{(n)}$ si označíme $(n+1)$-árnu čiastočnú funkciu definovanú predpisom

$$\psi^{(n)}(e, \vec{x}) \simeq \varphi_e^{(n)}(\vec{x})$$

Veta o enumerácií (Kleene)

Pre každé $n \geq 1$, čiastočná funkcia $\psi^{(n)}$ je čiastočne rekurzívna funkcia, ktorá enumeruje (z opakovaním) triedu n-árnych čiastočne rekurzívnych funkcií

Enumeračná funkcia

Dôkaz vety o enumerácií

- Z dôkazu Kleeneho vety o normálnej forme vyplýva, že

$$\psi^{(n)}(e, \vec{x}) \simeq \mathrm{U}\,\mu s[\mathrm{T}_n(e, \vec{x}, s)].$$

  Rekurzívnosť enumeračnej funkcie plynie z tohoto vyjadrenia

$$f(e, \vec{x}) \simeq \mu s[\mathrm{T}_n(e, \vec{x}, s)] \qquad \psi^{(n)}(e, \vec{x}) \simeq \mathrm{U}\, f(e, \vec{x}).$$

- Z vety charakterizujúcej rekurzívne indexy plynie, že nasledujúca postupnosť

$$\begin{array}{lcccc} & \lambda\vec{x}.\psi^{(n)}(0, \vec{x}) & \lambda\vec{x}.\psi^{(n)}(1, \vec{x}) & \lambda\vec{x}.\psi^{(n)}(2, \vec{x}) & \ldots \\ \text{t.j.} & \varphi_0^{(n)} & \varphi_1^{(n)} & \varphi_2^{(n)} & \ldots \end{array}$$

  je enumerácia triedy *n*-árnych čiastočne rekurzívnych funkcií

Enumeračná funkcia

Enumeračná funkcia je univerzálna (platí to aj naopak)

$(n+1)$-árna čiastočná funkcia $\psi^{(n)}$ spĺňa tieto dve podmienky

- Pre každú n-árnu čiastočne rekurzívnu funkciu f existuje číslo e také, že pre každú n-ticu čísel $x_1, \ldots, x_n$ platí rovnosť

$$\psi^{(n)}(e, x_1, \ldots, x_n) \simeq f(x_1, \ldots, x_n)$$

- Pre každé číslo e, n-árna čiastočná funkcia f definovaná vzťahom

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \psi^{(n)}(e, x_1, \ldots, x_n)$$

  je čiastočne rekurzívna funkcia

Vravíme, že $\psi^{(n)}$ je univerzálnou pre triedu n-árnych čiastočne rekurzívnych funkcií

Enumeračná funkcia

Zúplnenie enumeračnej funkcie nie je rekurzívna funkcia

Dôkaz sporom: predpokladajme napr., že $(n+1)$-árna funkcia f:

$$f(e,\vec{x}) \simeq \begin{cases} \psi^{(n)}(e,\vec{x}) & \text{ak } \psi^{(n)}(e,\vec{x})\downarrow \\ 0 & \text{ak } \psi^{(n)}(e,\vec{x})\uparrow \end{cases} \tag{1}$$

je rekurzívna. Potom aj n-árna funkcia g definovaná vzťahom

$$g(x_1,\ldots,x_n) = f(x_1,x_1,\ldots,x_n)+1 \tag{2}$$

je rekurzívna. Existuje teda číslo e také, že pre každé $x_1,\ldots,x_n$:

$$\psi^{(n)}(e,x_1,\ldots,x_n) \simeq g(x_1,\ldots,x_n). \tag{3}$$

Odtiaľ $\psi^{(n)}(e,e,\ldots,e)\downarrow$. Postupnými úpravami odvodíme spor:

$$g(e,..,e) \stackrel{(2)}{=} f(e,e,..,e)+1 \stackrel{(1)}{\simeq} \psi^{(n)}(e,e,..,e)+1 \stackrel{(3)}{\simeq} g(e,..,e)+1$$

Enumeračná funkcia

Graf enumeračnej funkcie nie je rekurzívny predikát

Dôkaz sporom: predpokladajme, že graf enumeračnej funkcie

$$G_n(e, x_1, \dots, x_n, y) \leftrightarrow \psi^{(n)}(e, x_1, \dots, x_n) \simeq y \tag{4}$$

je rekurzívny predikát. Potom je rekurzívny aj n-árny predikát P:

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow G_n(x_1, x_1, \dots, x_n, 0). \tag{5}$$

Existuje teda číslo e také, že pre každú n-ticu čísel $x_1, \dots, x_n$ platí

$$\psi^{(n)}(e, x_1, \dots, x_n) \simeq P_*(x_1, \dots, x_n). \tag{6}$$

Postupnými úpravami teraz dostaneme spor:

$$P(e, \dots, e) \overset{(5)}{\Leftrightarrow} G_n(e, e, \dots, e, 0) \overset{(4)}{\Leftrightarrow} \psi^{(n)}(e, e, \dots, e) \simeq 0 \overset{(6)}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow P_*(e, \dots, e) \simeq 0 \Leftrightarrow P_*(e, \dots, e) = 0 \Leftrightarrow \neg P(e, \dots, e).$$

Záver

10. cvičenie

- Výsledky s komentárom nájdete na webe

11. cvičenie

- Začína hneď po prednáške v miestnosti I-H3
- Pracujte samostatne
- Úlohy odovzdať najneskôr do 12:00 v pondelok budúci týždeň

12. prednáška

- Čiastočne μ-rekurzívne funkcie
- Rekurzívne rozhodnuteľné, polorozhodnuteľné a nerozhodnuteľné problémy
- Churchova téza