1-AIN-625 Úvod do matematickej logiky pre programátorov
1-INF-450 Logika pre informatikov

Zimný semester 2011/12

10. prednáška

Ján Komara

Obsah 10. prednášky

Zopakovanie

Cieľ predmetu

- Vybudovať matematické základy deklaratívnych programovacích jazykov

Stručná osnova predmetu

- Primitívne rekurzívne funkcie
  - kódovanie (aritmetizácia) dátových štruktúr
  - regulárne rekurzívne definície s mierou
- Obecne rekurzívne funkcie
  - regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií
- Čiastočne rekurzívne funkcie
  - Kleeneho prvá veta o rekurzii (veta o pevnom bode)
  - Kleeneho veta o normálnej forme
  - rekurzívne nerozhodnuteľné problémy, napr. problém zastavenia
  - Churchova téza

Zopakovanie

Regulárna rekurzia do dobre založenej relácie $\prec$

Sú to definície v tvare

$$f(\vec{x}) = \tau[f;\vec{x}],$$

pre ktoré sú splnené podmienky regularity. Tie majú tvar

$$\Gamma^{\tau}_{f(\vec{\rho})}[f;\vec{x}] \to \vec{\rho}[f;\vec{x}] \prec \vec{x}$$

pre každú rekurzívnu aplikáciu $f(\vec{\rho})$ strážený podmienkou $\Gamma^{\tau}_{f(\vec{\rho})}$.
Splnenie podmienok pre funkciu definovanou pridruženou rovnosťou

$$f(\vec{x}) = \tau\left[[f]^{\prec}_{\vec{x}};\vec{x}\right].$$

Term na pravej strane rovnosti vznikol s termu $\tau[f;\vec{x}]$ nahradením každej rekurzívnej aplikácie $f(\vec{\rho})$ výrazom

$$[f]^{\prec}_{x}(\vec{\rho}) \equiv \textbf{if } \vec{\rho} \prec \vec{x} \textbf{ then } f(\vec{\rho}) \textbf{ else } 0.$$

Zopakovanie

Primitívne rekurzívne funkcie (charakterizácia)

Trieda primitívne rekurzívnych funkcií je najmenšia trieda funkcií, ktorá obsahuje funkciu nasledovníka $x + 1$, funkciu predchodcu $x \dot{-} 1$ a je uzavretá na explicitné definície a regulárnu rekurziu s mierou

Obecne rekurzívne funkcie (definícia)

Trieda obecne rekurzívnych funkcií je najmenšia trieda funkcií, ktorá obsahuje funkciu nasledovníka $x + 1$, funkciu predchodcu $x \dot{-} 1$ a je uzavretá na explicitné definície a regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií

Zopakovanie

Čiastočné funkcie

n-árna čiastočná funkcia f je jednoznačná relácia z N^n do N:

$$(\vec{x}, y) \in f \wedge (\vec{x}, z) \in f \rightarrow y = z$$

n-árne čiastočné funkcie sú usporiadané množinovou reláciou $f \subseteq g$

Silná rovnosť (Kleene)

$\tau \simeq \rho$ platí, ak jedna z nasledujúcich podmienok je splnená

- výrazy τ, ρ sú definované a ich hodnoty sú rovnaké
- výrazy τ, ρ nie sú definované

Ak termy τ, ρ obsahujú len funkcie, potom $\tau \simeq \rho \leftrightarrow \tau = \rho$

Označenie:

- $\tau\downarrow$, ak výraz τ je definovaný (má hodnotu, konverguje)
- $\tau\uparrow$, ak výraz τ nie je definovaný (nemá hodnotu, diverguje)

Zopakovanie

Veta o pevnom bode

Veta (Kleene)

Funkcionálna rovnica v neznámej f:

$$f(\vec{x}) \simeq \tau[f;\vec{x}]$$

má najmenšie riešenie n-árnu čiastočnú funkciu $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$, ktorá je limitou reťazca $f_0, f_1, f_2, \ldots$ definovaného predpisom

$$f_0 = \emptyset^{(n)}$$
$$f_{i+1}(\vec{x}) \simeq \tau[f_i;\vec{x}].$$

Poznámka

Toto je prvá časť Kleeneho prvej vety o rekurzii. V druhej časti tejto vety sa tvrdí, že najmenšie riešenie funkcionálnej rovnice je vypočítateľné.

Zopakovanie

Dôkaz vety o pevnom bode

- Postupnosť $f_0, f_1, f_2, \ldots$ je reťazec:

$$f_0 \subseteq f_1 \subseteq f_2 \subseteq \cdots \subseteq f_i \subseteq f_{i+1} \subseteq \cdots$$

- Limita reťazca $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$ je riešením funkcionálnej rovnice:

$$(\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i)(\vec{x}) \simeq \tau[\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i; \vec{x}]$$

- Ak g je riešením funkcionálnej rovnice, potom

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i \subseteq g$$

Výpočtový model

Čiastočne rekurzívne funkcie

- Základné funkcie
  - funkcia nasledovníka $\mathrm{S}(x) = x + 1$
  - funkcia predchodcu $\mathrm{P}(x) = x \dot{-} 1$
- Explicitné definície

$$f(\vec{x}) \simeq \tau[\vec{x}]$$

- Rekurzívne definície čiastočných funkcií so silnou rovnosťou

$$f(\vec{x}) \simeq \tau[f; \vec{x}]$$

Funkcia je rekurzívna, ak je to totálna čiastočne rekurzívna funkcia
Predikát je rekurzívny, ak taká je jeho charakteristická funkcia

Výpočtový model

Rekurzívne termy a funkčné symboly

Trieda rekurzívnych termov a funkčných symbolov:

- premenné $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ a konštanta 0 sú rekurzívne termy
- ak τ je rekurzívny term, potom aplikácie $\mathsf{S}(\tau)$ a $\mathsf{P}(\tau)$ sú rekurzívne termy
- ak τ_1, τ_2, τ_3 sú rekurzívne termy, potom aplikácia $\mathsf{D}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ je rekurzívny term
- ak $\tau_1, \dots, \tau_n$ sú rekurzívne termy, potom aplikácia $\mathfrak{f}_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ je rekurzívny term
- ak $\rho_1, \dots, \rho_n$ sú rekurzívne termy a τ je rekurzívny term v premenných $x_1, \dots, x_n$ a funkčnej premennej $\mathfrak{f}_n$, potom aplikácia $(\lambda_n.\tau)(\rho_1, \dots, \rho_n)$ je rekurzívny term

Výpočtový model

Interpretácia rekurzívnych termov a funkčných symbolov

Interpretáciu rekurzívnych funkčných symbolov $\lambda_n.\tau$ definujeme indukciou na štruktúru rekurzívnych termov τ takto:

> *Nech* $\tau[\mathfrak{f}_n; x_1, \ldots, x_n]$ *je rekurzívny term v premenných* $x_1, \ldots, x_n$ *a funkčnej premennej* $\mathfrak{f}_n$*. Predpokladajme ďalej, že definované rekurzívne funkčné symboly vyskytujúce sa vo výraze* τ *sú interpretované podľa IP. Potom interpretujeme rekurzívny funkčný symbol* $\lambda_n.\tau$ *ako čiastočnú funkciu* f *definovanú rovnicou*
>
> $$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \ldots, x_n].$$

Interpretáciu symbolu $\lambda_n.\tau$ si označíme opäť tým istým menom $\lambda_n.\tau$.

Výpočtový model

Príklad

Primitívne rekurzívna definícia operácie sčítania:

$$0 + y = y$$
$$\mathsf{S}(x) + y = \mathsf{S}(x + y)$$

Regulárna rekurzívna definícia operácie sčítania:

$$x + y = \textbf{if } x \neq 0 \textbf{ then } \mathsf{S}\big(\mathsf{P}(x) + y\big) \textbf{ else } y$$

Rekurzívna definícia operácie sčítania so silnou rovnosťou:

$$x_1 + x_2 \simeq \mathsf{D}\big(x_1, \mathsf{S}\big(\mathsf{P}(x_1) + x_2\big), x_2\big)$$

Rekurzívny funkčný symbol pre operáciu sčítania:

$$\lambda_2.\mathsf{D}\Big(x_1, \mathsf{S}\,\mathfrak{f}_2\big(\mathsf{P}(x_1), x_2\big), x_2\Big)$$

Výpočtový model

Monadické numerály

Výpočet prebieha na monadických numeráloch:

$$0 \quad \mathsf{S}(0) \quad \mathsf{S\,S}(0) \quad \mathsf{S\,S\,S}(0) \quad \mathsf{S\,S\,S\,S}(0) \quad \ldots$$

Notačná konvencia:

- ak x je prirodzené číslo, potom $\underline{x}$ je monadický numerál, ktorý denotuje číslo x, t.j.

$$\underline{x} \equiv \overbrace{\mathsf{S} \ldots \mathsf{S}}^{x\text{-krát}}(0)$$

- ak $x_1, \ldots, x_n$ sú prirodzené čísla, potom

$$\underline{x_1, \ldots, x_n} \equiv \underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n} \equiv \overbrace{\mathsf{S} \ldots \mathsf{S}}^{x_1\text{-krát}}(0), \ldots, \overbrace{\mathsf{S} \ldots \mathsf{S}}^{x_n\text{-krát}}(0)$$

Výpočtový model

Jeden krok výpočtu

Ak uzavretý rekurzívny term τ nie je numerál, tak musí obsahovať aspoň jeden podvýraz (*redex*) v tvare

$$\mathrm{P}(\underline{x}) \qquad \mathrm{D}(\underline{x}, \tau_2, \tau_3) \qquad (\lambda_n.\tau)(\vec{\underline{x}})$$

Jeden výpočtový krok spočíva v nájdení najľavejšieho redexu a jeho nahradením kontrakciou podľa nasledujúcich pravidiel

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\underline{x}) &\rhd_1 \underline{x \dot{-} 1} \\
\mathrm{D}(\underline{0}, \tau_2, \tau_3) &\rhd_1 \tau_3 \\
\mathrm{D}(\underline{x+1}, \tau_2, \tau_3) &\rhd_1 \tau_2 \\
(\lambda_n.\tau[\mathfrak{f}_n; \vec{x}])(\vec{\underline{x}}) &\rhd_1 \tau[\lambda_n.\tau; \vec{\underline{x}}]
\end{aligned}$$

Tak dostaneme nový uzavretý rekurzívny term ρ a píšeme

$$\tau \rhd_1 \rho$$

Výpočtový model

Viac krokov výpočtu

Označenie:

- $\tau_1 \rhd_k \tau_2$, ak výraz τ_1 sa redukuje do výrazu τ_2 po k krokoch. To znamená, že existujú uzavreté rekurzívne termy $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_k$ také, že

  $$\tau_1 \equiv \rho_0 \rhd_1 \rho_1 \rhd_1 \cdots \rhd_1 \rho_k \equiv \tau_2.$$

  Umožníme tiež prípad $k = 0$. Vtedy $\tau_1 \rhd_0 \tau_2 \leftrightarrow \tau_1 \equiv \tau_2$.
- $\tau_1 \rhd_{\leq k} \tau_2$, ak $\tau_1 \rhd_l \tau_2$ pre nejaké $l \leq k$.
- $\tau_1 \rhd \tau_2$, ak $\tau_1 \rhd_k \tau_2$ pre nejaké k.

Platí

$$\tau \rhd \rho_1 \wedge \tau \rhd \rho_2 \rightarrow \rho_1 \rhd \rho_2 \vee \rho_2 \rhd \rho_1$$

$$\underline{x} \rhd \rho \leftrightarrow \rho \equiv \underline{x}.$$

Výpočtový model

Veta (Ekvivalentnosť definičnej a výpočtovej sémantiky)

Platí

$$(\lambda_n.\tau)(\vec{x}) \simeq y \leftrightarrow (\lambda_n.\tau)(\underline{\vec{x}}) \rhd \underline{y}$$

Dôkaz.

Toto je priamy dôsledok Kleeneho prvej vety o rekurzii pre funkcionálnu rovnicu

$$f(\vec{x}) \simeq \tau[f;\vec{x}]$$

Aritmetizácia výpočtového modelu

Aritmetizácia rekurzívnych termov a funkčných symbolov

Pomocou párových konštruktorov z rôznymi rozlišovacími položkami:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_i &= \langle 0, i \rangle && \text{(premenné)} \\
\boldsymbol{0} &= \langle 1, 0 \rangle && \text{(konštanta 0)} \\
\boldsymbol{S}(t) &= \langle 2, t \rangle && \text{(aplikácia funkcie nasledovníka)} \\
\boldsymbol{P}(t) &= \langle 3, t \rangle && \text{(aplikácia funkcie predchodcu)} \\
\boldsymbol{D}(t_1, t_2, t_3) &= \langle 4, t_1, t_2, t_3 \rangle && \text{(podmienkový výraz)} \\
t_1 \bullet t_2 &= \langle 5, t_1, t_2 \rangle && \text{(curryfikovaná aplikácia)} \\
e\boldsymbol{[}ts\boldsymbol{]} &= \langle 6, e, ts \rangle && \text{(čiastočná aplikácia)} \\
\boldsymbol{f}_n &= \langle 7, n \rangle && \text{(funkčná premenná)} \\
\boldsymbol{\lambda}_n\boldsymbol{.}\, t &= \langle 8, n, t \rangle && \text{(definovaná funkcia)}
\end{aligned}
$$

Notačná konvencia: $t_1 \bullet t_2 \bullet t_3 \equiv (t_1 \bullet t_2) \bullet t_3$

Aritmetizácia výpočtového modelu

Aritmetizácia rekurzívnych termov a funkčných symbolov

Číslo $\ulcorner \tau \urcorner$ resp. $\ulcorner f \urcorner$ je kódom termu resp. funkčného symbolu:

$$
\begin{aligned}
\ulcorner x_i \urcorner &= \boldsymbol{x}_i \\
\ulcorner 0 \urcorner &= \boldsymbol{0} \\
\ulcorner \mathsf{S}(\tau) \urcorner &= \boldsymbol{S}(\ulcorner \tau \urcorner) \\
\ulcorner \mathsf{P}(\tau) \urcorner &= \boldsymbol{P}(\ulcorner \tau \urcorner) \\
\ulcorner \mathsf{D}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \urcorner &= \boldsymbol{D}(\ulcorner \tau_1 \urcorner, \ulcorner \tau_2 \urcorner, \ulcorner \tau_3 \urcorner) \\
\ulcorner f(\tau_1, \ldots, \tau_n) \urcorner &= \ulcorner f \urcorner \boldsymbol{[} \langle \ulcorner \tau_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner \tau_k \urcorner, 0 \rangle \boldsymbol{]} \bullet \ulcorner \tau_{k+1} \urcorner \bullet \cdots \bullet \ulcorner \tau_n \urcorner \\
& \quad \text{kde } k \text{ je najväčšie prirodzené číslo také,} \\
& \quad \text{že všetky termy } \tau_1, \ldots, \tau_k \text{ sú numerály} \\
\ulcorner \mathfrak{f}_n \urcorner &= \boldsymbol{f}_n \\
\ulcorner \lambda_n . \tau \urcorner &= \boldsymbol{\lambda}_n \boldsymbol{.} \ulcorner \tau \urcorner
\end{aligned}
$$

Aritmetizácia výpočtového modelu

Príklad

Regulárna rekurzívna definícia operácie sčítania:

$$x + y = \textbf{if } x \neq 0 \textbf{ then } \mathsf{S}\big(\mathsf{P}(x) + y\big) \textbf{ else } y$$

Rekurzívna definícia operácie sčítania so silnou rovnosťou:

$$x_1 + x_2 \simeq \mathsf{D}\big(x_1, \mathsf{S}\big(\mathsf{P}(x_1) + x_2\big), x_2\big)$$

Rekurzívny funkčný symbol pre operáciu sčítania:

$$\lambda_2.\mathsf{D}\Big(x_1, \mathsf{S}\,\mathfrak{f}_2\big(\mathsf{P}(x_1), x_2\big), x_2\Big)$$

Rekurzívny index operácie sčítania:

$$\boldsymbol{\lambda}_2\boldsymbol{.}\,\boldsymbol{D}\Big(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{S}\big(\boldsymbol{f}_2\mathbf{[}0\mathbf{]} \bullet \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}_1) \bullet \boldsymbol{x}_2\big), \boldsymbol{x}_2\Big)$$

Aritmetizácia výpočtového modelu

Monadické numerály, časť prvá

Unárna operácia $\ulcorner \underline{x} \urcorner$ vytvorí kód numerálu $\underline{x}$:

$$\ulcorner \underline{0} \urcorner = \boldsymbol{0}$$
$$\ulcorner \underline{x+1} \urcorner = \boldsymbol{S}(\ulcorner \underline{x} \urcorner)$$

Je to primitívne rekurzívna funkcia
Jej inverzia je funkcia $Dc(t)$, ktorá dekóduje numerál t, t.j.

$$Dc(\ulcorner \underline{x} \urcorner) = x$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie $Dc(t)$ plynie z tohoto vyjadrenia

$$Dc(\boldsymbol{0}) = 0$$
$$Dc\,\boldsymbol{S}(t) = Dc(t) + 1$$

Aritmetizácia výpočtového modelu

Monadické numerály, časť druhá

Predikát $Nm(t)$ platí, ak číslo t je kódom nejakého numerálu, t.j.

$$Nm(t) \leftrightarrow \exists x\, t = \ulcorner \underline{x} \urcorner$$

Charakteristická funkcia $Nm_*(t)$ je primitívne rekurzívna:

$$\begin{aligned}
&Nm_*(\boldsymbol{0}) = 1 \\
&Nm_*\, \boldsymbol{S}(t) = 1 \leftarrow Nm(t) = 1 \\
&Nm_*\, \boldsymbol{S}(t) = 0 \leftarrow Nm(t) \neq 1 \\
&Nm_*(t) = 0 \leftarrow \neg\big(t = \boldsymbol{0} \vee \exists t_1\, t = \boldsymbol{S}(t_1)\big)
\end{aligned}$$

Predikátová forma uvedenej definície:

$$\begin{aligned}
&Nm(\boldsymbol{0}) \\
&Nm\, \boldsymbol{S}(t) \leftarrow Nm(t)
\end{aligned}$$

Aritmetizácia výpočtového modelu

Kontrakcia argumentov

Binárna kontrakčná funkcia $t_1 \underline{\bullet} t_2$ spĺňa rovnosť

$$\ulcorner f(\tau_1, \ldots, \tau_n) \urcorner = \ulcorner f \urcorner [\langle \ulcorner \tau_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner \tau_k \urcorner, 0 \rangle] \underline{\bullet} \ulcorner \tau_{k+1} \urcorner \underline{\bullet} \cdots \underline{\bullet} \ulcorner \tau_n \urcorner$$

Tu $\tau_1, \ldots, \tau_k$ sú monadické numerály
Primitívna rekurzívnosť funkcie plynie z tohoto vyjadrenia

$$t_1 \underline{\bullet} t_2 = \begin{cases} e[ts \oplus \langle t_2, 0 \rangle] & \text{ak } t_1 = e[ts] \text{ a } Nm(t_2) \text{ pre nejaké } e, ts \\ t_1 \bullet t_2 & \text{ináč} \end{cases}$$

Notačná konvencia:

$$t_1 \underline{\bullet} t_2 \underline{\bullet} t_3 \equiv (t_1 \underline{\bullet} t_2) \underline{\bullet} t_3$$

Aritmetizácia výpočtového modelu

Substitúcia

Ternárna funkcia $t[\![e; rs]\!]$ je aritmetizácia operácie substitúcie $\tau[\lambda_n.\sigma; \vec{\underline{x}}]$ nad rekurzívnymi termami:

$$\ulcorner\tau\urcorner[\![\ulcorner\lambda_n.\sigma\urcorner; \langle\ulcorner\underline{x_1}\urcorner, \ldots, \ulcorner\underline{x_n}\urcorner, 0\rangle]\!] = \ulcorner\tau[\lambda_n.\sigma; \underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}]\urcorner$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie $t[\![e; rs]\!]$ plynie z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_i[\![e; rs]\!] &= (rs)_{i \dot{-} 1} \\
\boldsymbol{0}[\![e; rs]\!] &= \boldsymbol{0} \\
\boldsymbol{S}(t)[\![e; rs]\!] &= \boldsymbol{S}(t[\![e; rs]\!]) \\
\boldsymbol{P}(t)[\![e; rs]\!] &= \boldsymbol{P}(t[\![e; rs]\!]) \\
\boldsymbol{D}(t_1, t_2, t_3)[\![e; rs]\!] &= \boldsymbol{D}(t_1[\![e; rs]\!], t_2[\![e; rs]\!], t_3[\![e; rs]\!]) \\
(t_1 \bullet t_2)[\![e; rs]\!] &= t_1[\![e; rs]\!] \underline{\bullet}\, t_2[\![e; rs]\!] \\
\boldsymbol{f}_n[\![ts]\!][\![e; rs]\!] &= e[\![ts]\!] \\
(\boldsymbol{\lambda}_n.\, t)[\![ts]\!][\![e; rs]\!] &= (\boldsymbol{\lambda}_n.\, t)[\![ts]\!]
\end{aligned}$$

Aritmetizácia výpočtového modelu

Dve pomocné operácie

Špecifikácia:

$$Pn(\ulcorner \underline{x} \urcorner) = \ulcorner \underline{x \dot{-} 1} \urcorner$$
$$Dn(\ulcorner \underline{x} \urcorner, t_2, t_3) = \mathrm{D}(x, t_2, t_3)$$

Primitívna rekurzívnosť oboch funkcií plynie z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned} Pn(\mathit{0}) &= \mathit{0} \\ Pn\,\boldsymbol{S}(t) &= t \\ Dn(\mathit{0}, t_2, t_3) &= t_3 \\ Dn\big(\boldsymbol{S}(t_1), t_2, t_3\big) &= t_2 \end{aligned}$$

Aritmetizácia výpočtového modelu

Jeden krok výpočtu

Špecifikácia redukčnej funkcie $Rd(t)$:

$$Rd(\ulcorner \underline{x} \urcorner) = \ulcorner \underline{x} \urcorner \qquad \text{ak } \tau \rhd_1 \rho, \text{ potom } Rd(\ulcorner \tau \urcorner) = \ulcorner \rho \urcorner$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie plynie z tohoto vyjadrenia

$$
\begin{aligned}
Rd(\boldsymbol{0}) &= \boldsymbol{0} \\
Rd\, \boldsymbol{S}(t) &= \boldsymbol{S}\, Rd(t) \\
Rd\, \boldsymbol{P}(t) &= Pn(t) \leftarrow Nm(t) \\
Rd\, \boldsymbol{P}(t) &= \boldsymbol{P}\, Rd(t) \leftarrow \neg Nm(t) \\
Rd\, \boldsymbol{D}(t_1, t_2, t_3) &= Dn(t_1, t_2, t_3) \leftarrow Nm(t_1) \\
Rd\, \boldsymbol{D}(t_1, t_2, t_3) &= \boldsymbol{D}(Rd(t_1), t_2, t_3) \leftarrow \neg Nm(t_1) \\
Rd(t_1 \bullet t_2) &= t_1 \underline{\bullet}\, Rd(t_2) \leftarrow \exists e \exists ts\, t_1 = e\mathbf{[}ts\mathbf{]} \\
Rd(t_1 \bullet t_2) &= Rd(t_1) \underline{\bullet}\, t_2 \leftarrow \neg \exists e \exists ts\, t_1 = e\mathbf{[}ts\mathbf{]} \\
Rd\, (\boldsymbol{\lambda}_n \mathbf{.}\, t)\mathbf{[}ts\mathbf{]} &= t\mathbf{[}\boldsymbol{\lambda}_n \mathbf{.}\, t\mathbf{;}\, ts\mathbf{]}
\end{aligned}
$$

Aritmetizácia výpočtového modelu

Viac krokov výpočtu

Špecifikácia viackrokovej redukčnej funkcie $Rd^k(t)$:

$$Rd^k(\ulcorner \underline{x} \urcorner) = \ulcorner \underline{x} \urcorner$$
$$\text{ak } \tau \rhd_k \rho, \text{ potom } Rd^k(\ulcorner \tau \urcorner) = \ulcorner \rho \urcorner$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie plynie z tohoto vyjadrenia

$$Rd^0(t) = t$$
$$Rd^{k+1}(t) = Rd\, Rd^k(t)$$

Poznámka

Vyhodnotenie aplikácie $f(x)$ funkcie f s rekurzívnym indexom e, keď pre výpočet hodnoty $f(x)$ stačí nanajvýš k krokov:

$$Dc\, Rd^k e[\langle \ulcorner \underline{x} \urcorner, 0 \rangle]$$

Záver

8. cvičenie a 9. cvičenie (test)

- Výsledky s komentárom nájdete na webe

10. cvičenie

- Začína hneď po prednáške v miestnosti I-H3
- Pracujte samostatne
- Úlohy odovzdať najneskôr do 12:00 v pondelok budúci týždeň

11. prednáška

- Čiastočne rekurzívne funkcie
- Kleeneho veta o normálnej forme
- Čiastočne μ-rekurzívne funkcie