1-AIN-625 Úvod do matematickej logiky pre programátorov
1-INF-450 Logika pre informatikov

Zimný semester 2011/12
9. prednáška

Ján Komara

Obsah 9. prednášky

Zopakovanie

Cieľ predmetu

- Vybudovať matematické základy deklaratívnych programovacích jazykov

Stručná osnova predmetu

- Primitívne rekurzívne funkcie
  - kódovanie (aritmetizácia) dátových štruktúr
  - regulárne rekurzívne definície s mierou
- Obecne rekurzívne funkcie
  - regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií
- Čiastočne rekurzívne funkcie
  - Kleeneho prvá veta o rekurzii (veta o pevnom bode)
  - Kleeneho veta o normálnej forme
  - rekurzívne nerozhodnuteľné problémy, napr. problém zastavenia
  - Churchova téza

Zopakovanie

Regulárna rekurzia do dobre založenej relácie $\prec$

Sú to definície v tvare

$$f(\vec{x}) = \tau[f; \vec{x}],$$

pre ktoré sú splnené podmienky regularity. Tie majú tvar

$$\Gamma^{\tau}_{f(\vec{\rho})}[f; \vec{x}] \to \vec{\rho}[f; \vec{x}] \prec \vec{x}$$

pre každú rekurzívnu aplikáciu $f(\vec{\rho})$ stráženú podmienkou $\Gamma^{\tau}_{f(\vec{\rho})}$.
Splnenie podmienok pre funkciu definovanou pridruženou rovnosťou

$$f(\vec{x}) = \tau\left[[f]^{\prec}_{\vec{x}}; \vec{x}\right].$$

Term na pravej strane rovnosti vznikol s termu $\tau[f; \vec{x}]$ nahradením každej rekurzívnej aplikácie $f(\vec{\rho})$ výrazom

$$[f]^{\prec}_{x}(\vec{\rho}) \equiv \textbf{if } \vec{\rho} \prec \vec{x} \textbf{ then } f(\vec{\rho}) \textbf{ else } 0.$$

Zopakovanie

Primitívne rekurzívne funkcie (charakterizácia)

Trieda primitívne rekurzívnych funkcií je najmenšia trieda funkcií, ktorá obsahuje funkciu nasledovníka $x + 1$, funkciu predchodcu $x \dot{-} 1$ a je uzavretá na explicitné definície a regulárnu rekurziu s mierou

Obecne rekurzívne funkcie (definícia)

Trieda obecne rekurzívnych funkcií je najmenšia trieda funkcií, ktorá obsahuje funkciu nasledovníka $x + 1$, funkciu predchodcu $x \dot{-} 1$ a je uzavretá na explicitné definície a regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií

Čiastočné funkcie

Čiastočné funkcie

n-árna čiastočná funkcia f je jednoznačná relácia z N^n do N:

$$(\vec{x}, y) \in f \wedge (\vec{x}, z) \in f \rightarrow y = z$$

Definičný obor čiastočnej funkcie f:

$$\operatorname{dom} f = \{\vec{x} \in \mathrm{N}^n \mid \exists y(\vec{x}, y) \in f\}$$

Čiastočná funkcia f je totálna, ak $\operatorname{dom} f = \mathrm{N}^n$, t.j.

$$\forall \vec{x} \exists y(\vec{x}, y) \in f$$

Pre každé $n \geq 1$, symbolom $\emptyset^{(n)}$ označujeme n-árnu čiastočnú funkciu, ktorá nie je nikde definovaná

Čiastočné funkcie

Usporiadanie čiastočných funkcií

Trieda n-árnych čiastočných funkcií je usporiadaná množinovou reláciou $\subseteq$:

- f je rozšírením g, ak $g \subseteq f$
- f je zúžením g, ak $f \subseteq g$
- $\emptyset^{(n)} \subseteq f$ pre každú čiastočnú n-árnu funkciu f
- ak $f \subseteq g$ a f je totálna, potom $f = g$
- totálne rozšírenie f nazveme zúplnením čiastočnej funkcie f

Postupnosť n-árnych čiastočných funkcií $f_0, f_1, f_2, \ldots$ je reťazec, ak

$$f_0 \subseteq f_1 \subseteq f_2 \subseteq \cdots \subseteq f_i \subseteq f_{i+1} \subseteq \cdots$$

Jeho limita $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$:

$$(\vec{x}, y) \in \bigcup_{i=0}^{\infty} f_i \leftrightarrow \exists i \, (\vec{x}, y) \in f_i$$

Čiastočné funkcie

Čiastočná denotácia termov

Tvrdenie $\tau \simeq y$, ktoré čítame takto

hodnota výrazu τ existuje a je rovná číslu y,

je definované induktívne na štruktúru termu τ:

$$x \simeq y \equiv x = y$$

$$f(\rho_1, \ldots, \rho_n) \simeq y \equiv \exists z_1 \cdots \exists z_n \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} \rho_i \simeq z_i \wedge (z_1, \ldots, z_n, y) \in f \Big)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \simeq y \equiv\ \exists z_1 \big(\rho_1 \simeq z_1 \wedge (z_1 \neq 0 \wedge \rho_2 \simeq z \vee \\ z_1 = 0 \wedge \rho_3 \simeq z) \big) \end{aligned}$$

Ak hodnota termu existuje, potom je určená jednoznačne:

$$\tau \simeq y \wedge \tau \simeq z \rightarrow y = z$$

Ak τ obsahuje len funkcie, potom $\tau \simeq y \leftrightarrow \tau = y$

Čiastočné funkcie

Silná rovnosť (Kleene)

Označenie:

$$\tau\!\downarrow\ \equiv \exists y\, \tau \simeq y \qquad (\tau \text{ je definovaný, má hodnotu, konverguje})$$
$$\tau\!\uparrow\ \equiv \neg\exists y\, \tau \simeq y \qquad (\tau \text{ nie je definovaný, nemá hodnotu, diverguje})$$

Silná rovnosť $\tau \simeq \rho$ je definovaná predpisom

$$\tau \simeq \rho \equiv \exists y \exists z (\tau \simeq y \land \rho \simeq z \land y = z) \lor \tau\!\uparrow \land\, \rho\!\uparrow$$

Platí

$$\tau \simeq \rho \leftrightarrow \forall y (\tau \simeq y \leftrightarrow \rho \simeq y)$$
$$\tau \simeq \tau \qquad\qquad \tau \simeq \rho \to \rho \simeq \tau$$
$$\tau \simeq \rho \land \rho \simeq \sigma \to \tau \simeq \sigma$$

Ak termy τ, ρ obsahujú len funkcie, potom $\tau \simeq \rho \leftrightarrow \tau = \rho$

Veta o pevnom bode

Veta (Kleene)

Funkcionálna rovnica v neznámej f:

$$f(\vec{x}) \simeq \tau[f; \vec{x}]$$

má najmenšie riešenie n-árnu čiastočnú funkciu $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$, ktorá je limitou reťazca $f_0, f_1, f_2, \ldots$ definovaného predpisom

$$f_0 = \emptyset^{(n)}$$
$$f_{i+1}(\vec{x}) \simeq \tau[f_i; \vec{x}].$$

Poznámka

Toto je prvá časť Kleeneho prvej vety o rekurzii. V druhej časti tejto vety sa tvrdí, že najmenšie riešenie funkcionálnej rovnice je vypočítateľné.

Veta o pevnom bode

Monotónnosť

Pre ľubovolné n-árne čiastočné funkcie f a g platí

$$f \subseteq g \wedge \tau[f;\vec{x}] \simeq y \rightarrow \tau[g;\vec{x}] \simeq y$$

Dôkaz je indukciou na štruktúru termu τ

Spojitosť

Pre ľubovolný reťazec $f_0, f_1, f_2, \ldots$ platí

$$\tau[\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i;\vec{x}] \simeq y \leftrightarrow \exists i\, \tau[f_i;\vec{x}] \simeq y$$

Implikácia ($\leftarrow$) je priamočiary dôsledok predchádzajúcej vlastnosti, opačná implikácia sa dokazuje indukciou na štruktúru termu τ

Veta o pevnom bode

Dôkaz vety o pevnom bode

- Postupnosť $f_0, f_1, f_2, \ldots$ je reťazec, t.j.

$$\forall i \, f_i \subseteq f_{i+1}$$

- Limita reťazca $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$ je riešením funkcionálnej rovnice, t.j.

$$\forall \vec{x} \, (\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i)(\vec{x}) \simeq \tau[\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i; \vec{x}]$$

- Ak g je riešením funkcionálnej rovnice, potom

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i \subseteq g$$

Veta o pevnom bode

Dôkaz vety o pevnom bode

- Postupnosť $f_0, f_1, f_2, \ldots$ je reťazec, t.j.

$$\forall i \forall \vec{x} \forall y \big(f_i(\vec{x}) \simeq y \rightarrow f_{i+1}(\vec{x}) \simeq y \big)$$

- Limita reťazca $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$ je riešením funkcionálnej rovnice, t.j.

$$\forall \vec{x} \forall y \left((\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i)(\vec{x}) \simeq y \leftrightarrow \tau[\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i; \vec{x}] \simeq y \right)$$

- Ak g je riešením funkcionálnej rovnice, potom

$$\forall i \forall \vec{x} \forall y \big(f_i(\vec{x}) \simeq y \rightarrow g(\vec{x}) \simeq y \big)$$

Programming Language

Pattern Matching with Single-valued Formulas

Single-valued formula $\varphi[\vec{x};\vec{y}]$ satisfies uniqueness condition

$$\Gamma[\vec{x}] \to \varphi[\vec{x};\vec{y}] \land \varphi[\vec{x};\vec{z}] \to \bigwedge_{i=1}^{m} y_i = z_i .$$

$\vec{x}$ and $\vec{y}$ are the input and output variables of φ. Γ is the guard, Characteristic term $\chi[\vec{x}]$ for φ is an $0{-}1$-term s.t.

$$\Gamma[\vec{x}] \to \exists \vec{y}\, \varphi[\vec{x};\vec{y}] \leftrightarrow \chi[\vec{x}] = 1.$$

Witnessing terms $\vec{\omega}[\vec{x}]$ for the output variables:

$$\Gamma[\vec{x}] \to \exists \vec{y}\, \varphi[\vec{x};\vec{y}] \leftrightarrow \varphi\big[\vec{x};\vec{\omega}[\vec{x}]\big].$$

We have

$$\Gamma[\vec{x}] \to \varphi[\vec{x};\vec{y}] \leftrightarrow \chi[\vec{x}] = 1 \land \bigwedge_{i=1}^{m} \omega_i[\vec{x}] = y_i .$$

Programming Language

Case Discrimination Terms

Conditional expression guarded with $\Gamma[\vec{x}]$:

$$\begin{array}{l}\textbf{case}\\ \quad \varphi_1[\vec{x};\vec{y}_1] \Rightarrow \rho_1[\vec{x},\vec{y}_1]\\ \quad \vdots\\ \quad \varphi_m[\vec{x};\vec{y}_m] \Rightarrow \rho_m[\vec{x},\vec{y}_m]\\ \textbf{end}\end{array}$$

$$\begin{array}{l}\textbf{case}\\ \quad \chi_1[\vec{x}] = 1 \wedge \vec{\omega}_1 = \vec{y}_1 \Rightarrow \rho_1[\vec{x},\vec{y}_1]\\ \quad \vdots\\ \quad \chi_m[\vec{x}] = 1 \wedge \vec{\omega}_m = \vec{y}_m \Rightarrow \rho_m[\vec{x},\vec{y}_m]\\ \textbf{end}.\end{array}$$

Discrimination condition (completeness and pairwise disjointness):

$$\Gamma[\vec{x}] \to \bigvee_{i=1}^{m} \exists \vec{y}_i\, \varphi_i[\vec{x};\vec{y}_i] \vee \bigwedge_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{m} \neg\big(\exists \vec{y}_i\, \varphi_i[\vec{x};\vec{y}_i] \wedge \exists \vec{y}_j\, \varphi_j[\vec{x};\vec{y}_j]\big).$$

Full unabbreviated notation:

$$\mathcal{D}^{\vec{\omega}_1,\ldots,\vec{\omega}_m}_{\chi_1,\ldots,\chi_m}(\varphi_1[\vec{x};\vec{y}_1], \rho_1[\vec{x},\vec{y}_1], \ldots, \varphi_m[\vec{x};\vec{y}_m], \rho_m[\vec{x},\vec{y}_m]).$$

Programming Language

Regular Programs

Properties of total functions with preconditions:

$$\varphi[\vec{x}] \to f(\vec{x}) = \tau[f; \vec{x}].$$

Conditions of regularity: all recursive applications decrease in a well-founded relation $\prec$:

$$\varphi[\vec{x}] \wedge \Gamma_{f(\vec{\rho})} \to \vec{\rho} \prec \vec{x} \wedge \varphi[\vec{\rho}]$$

for each recursive application of $f(\vec{\rho})$ guarded by $\Gamma_{f(\vec{\rho})}$ in τ.

Regular Recursive Definitions

Functional equations of the form

$$f(\vec{x}) = \tau[f; \vec{x}].$$

Conditions of regularity

$$\Gamma_{f(\vec{\rho})} \to \vec{\rho} \prec \vec{x}$$

must hold for f defined by

$$f(\vec{x}) = \tau\left[[f]_{\vec{x}}^{\prec}; \vec{x}\right].$$

Here, the $[f]_{\vec{x}}^{\prec}$ is the restriction of f:

$$[f]_{\vec{x}}^{\prec}(\vec{y}) \equiv \textbf{if } \vec{y} \prec \vec{x} \textbf{ then } f(\vec{y}) \textbf{ else } 0.$$

Záver

8. cvičenie

- Úlohy odovzdať najneskôr do 12:00 v pondelok budúci týždeň

9. cvičenie

- Začína hneď po prednáške v miestnosti I-H3
- Semestrálny test

10. prednáška

- Čiastočne rekurzívne funkcie
- Aritmetizácia výpočtového modelu pre čiastočne rekurzívne funkcie