1-AIN-625 Úvod do matematickej logiky pre programátorov
1-INF-450 Logika pre informatikov

Zimný semester 2011/12

8. prednáška

Ján Komara

Obsah 8. prednášky

Zopakovanie

Cieľ predmetu

- Vybudovať matematické základy deklaratívnych programovacích jazykov

Stručná osnova predmetu

- Primitívne rekurzívne funkcie
  - kódovanie (aritmetizácia) dátových štruktúr
  - regulárne rekurzívne definície s mierou
- Obecne rekurzívne funkcie
  - poza primitívnu rekurziu
    - Ackermann-Péterovej funkcia
    - univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie
  - regulárne rekurzívne definície
- Čiastočne rekurzívne funkcie

Zopakovanie

Rekurzia s mierou (syntaktická verzia)

Sú to definície v tvare

$$f(\vec{x}) = \tau\left[[f]^{\mu}_{\vec{x}}; \vec{x}\right].$$

Term na pravej strane rovnosti vznikol s termu $\tau[f; \vec{x}]$ nahradením každej rekurzívnej aplikácie $f(\vec{\rho})$ výrazom

$$[f]_x(\vec{\rho}) \equiv \textbf{if } \mu[\vec{\rho}] < \mu[\vec{x}] \textbf{ then } f(\vec{\rho}) \textbf{ else } 0.$$

Tu $\mu[\vec{x}]$ sa nazýva miera. Číslo $\mu[\vec{x}] + 1$ predstavuje horný odhad na hĺbku výpočtového stromu pre výpočet aplikácie $f(\vec{x})$.

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na rekurziu s mierou.

Zopakovanie

Regulárna rekurzia s mierou $\mu[\vec{x}]$

Sú to definície v tvare

$$f(\vec{x}) = \tau[f; \vec{x}],$$

pre ktoré sú splnené podmienky regularity. Tie majú tvar

$$\Gamma^{\tau}_{f(\vec{\rho})}[f; \vec{x}] \to \mu[\vec{\rho}[f; \vec{x}]] < \mu[\vec{x}]$$

pre každú rekurzívnu aplikáciu $f(\vec{\rho})$ stráženú podmienkou $\Gamma^{\tau}_{f(\vec{\rho})}$.
Splnenie podmienok pre funkciu definovanou pridruženou rovnosťou

$$f(\vec{x}) = \tau\left[[f]^{\mu}_{\vec{x}}; \vec{x}\right].$$

Veta

Primit. rekurz. funkcie sú uzavreté na regulárnu rekurziu s mierou.

Zopakovanie

Veta

Trieda primitívne rekurzívnych funkcií je najmenšia trieda funkcií, ktorá obsahuje funkciu nasledovníka $x + 1$, *funkciu predchodcu* $x \dot{-} 1$ *a je uzavretá na explicitné definície a regulárnu rekurziu s mierou*

Ackermannova funkcia (1928)

Postupnosť binárnych p.r. funkcií A_x $(x = 0, 1, 2, 3, \ldots)$:

$$\mathrm{A}_0(y, z) = z + y$$
$$\mathrm{A}_1(y, z) = z \cdot y$$
$$\mathrm{A}_2(y, z) = z^y$$

Definícia $\lambda xyz.\, \mathrm{A}_x(y, z)$ pomocou vnorenej dvojitej rekurzie

$$\mathrm{A}_0(y, z) = z + y$$
$$\mathrm{A}_{x+1}(0, z) = (x \neq_* 0)$$
$$\mathrm{A}_{x+1}(y + 1, z) = \mathrm{A}_x\big(\mathrm{A}_{x+1}(y, z), z\big)$$

Táto funkcia nie je primitívne rekurzívna, pretože jej diagonalizácia $\lambda x.\, \mathrm{A}_x(x, x)$ rastie rýchlejšie ako každá unárna p.r. funkcia

Ackermann-Péterovej funkcia

Definícia pomocou vnorenej dvojitej rekurzie

$$\begin{aligned} \mathrm{A}(0, y) &= y + 1 \\ \mathrm{A}(x+1, 0) &= \mathrm{A}(x, 1) \\ \mathrm{A}(x+1, y+1) &= \mathrm{A}\big(x, \mathrm{A}(x+1, y)\big) \end{aligned}$$

Napríklad

$$\begin{aligned} \mathrm{A}(1, y) &= y + 2 \\ \mathrm{A}(2, y) &= 2 \cdot y + 3 = 2 \cdot (y + 3) \dot{-} 3 \\ \mathrm{A}(3, y) &= 2^{y+3} \dot{-} 3 \end{aligned}$$

Funkcia nie je primitívne rekurzívna, pretože jej diagonalizácia $\lambda x.\, \mathrm{A}(x, x)$ rastie rýchlejšie ako každá unárna p.r. funkcia

Podmienky regularity pre Ackermann-Péterovej funkciu

Lexikografické usporiadanie dvojíc prirodzených čísel

$$(x_1, y_1) >_{\mathrm{lex}} (x_2, y_2) \leftrightarrow x_1 > x_2 \vee x_1 = x_2 \wedge y_1 > y_2$$

Je to dobré usporiadanie: každá klesajúca postupnosť je konečná

$$(x_1, y_1) >_{\mathrm{lex}} (x_2, y_2) >_{\mathrm{lex}} (x_3, y_3) >_{\mathrm{lex}} (x_4, y_4) >_{\mathrm{lex}} \cdots$$

Podmienky regularity pre funkciu $\mathrm{A}(x, y)$ sú triviálne splnené:

$$\begin{aligned} (x+1, 0) &>_{\mathrm{lex}} (x, 1) \\ (x+1, y+1) &>_{\mathrm{lex}} (x+1, y) \\ (x+1, y+1) &>_{\mathrm{lex}} \big(x, \mathrm{A}(x+1, y)\big) \end{aligned}$$

Je to definícia transfinitnou rekurziou

Graf Ackermann-Péterovej funkcie

Funkcia $\mathrm{A}(x, y)$ nie je primitívne rekurzívna, ale jej graf

$$G(x, y, z) \leftrightarrow \mathrm{A}(x, y) = z$$

je primitívne rekurzívny predikát

Idea dôkazu: vyjadriť graf v tvare

$$G(x, y, z) \leftrightarrow \exists s \leq b(z) \left(Cvs(s) \wedge \langle x, y, z \rangle \ \varepsilon \ s \right),$$

kde

- $Cvs(s)$ je p.r. predikát, ktorý platí, ak s je postupnosť histórie výpočtu Ackermann-Péterovej funkcie
- $b(z)$ je p.r. funkcia, ktorá dáva odhad na veľkosť takejto postupnosti pre výsledok výpočtu z

Špecifikácia interpretra

Interpreter programovacieho jazyka p.r. odvodení je binárna funkcia $e \bullet x$, ktorá má tieto dve základné vlastnosti:

- Pre každé $f \in \mathrm{PR}^n$ a $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{N}$ platí rovnosť:

$$\ulcorner f \urcorner \bullet \langle x_1, \ldots, x_n \rangle = f^{\mathcal{N}}(x_1, \ldots, x_n)$$

- Pre každé číslo $e \in \mathrm{N}$, unárna funkcia

$$f(x) = e \bullet x$$

  je primitívne rekurzívna funkcia

Implementácia interpretra

Definícia interpretra pomocou vnorenej dvojitej rekurzie

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Z} \bullet x &= 0 \\
\boldsymbol{S} \bullet x &= x + 1 \\
\boldsymbol{I}_i^n \bullet x &= [x]_i^n \\
\boldsymbol{\langle} g \boldsymbol{,} gs \boldsymbol{\rangle} \bullet x &= \left\langle g \bullet x, gs \bullet x \right\rangle \\
\boldsymbol{Comp}_m^n(h, gs) \bullet x &= h \bullet (gs \bullet x) \\
\boldsymbol{Rec}_n(g, h) \bullet \langle 0, y \rangle &= g \bullet y \\
\boldsymbol{Rec}_n(g, h) \bullet \langle x + 1, y \rangle &= h \bullet \left\langle x, \boldsymbol{Rec}_n(g, h) \bullet \langle x, y \rangle, y \right\rangle
\end{aligned}
$$

Podmienky regularity pre funkciu $e \bullet x$ sú triviálne splnené, napr.

$$
\begin{aligned}
&\big(\boldsymbol{Rec}_n(g, h), \langle x + 1, y \rangle\big) >_{\text{lex}} \big(\boldsymbol{Rec}_n(g, h), \langle x, y \rangle\big) \\
&\big(\boldsymbol{Rec}_n(g, h), \langle x + 1, y \rangle\big) >_{\text{lex}} \big(h, \left\langle x, \boldsymbol{Rec}_n(g, h) \bullet \langle x, y \rangle, y \right\rangle\big)
\end{aligned}
$$

Definícia univerzálnej funkcie

Vravíme, že $(n+1)$-árna funkcia U_n je univerzálnou pre triedu n-árnych p.r. funkcií, ak sú splnené tieto podmienky:

- Pre každú n-árnu p.r. funkciu f existuje číslo e také, že pre každú n-ticu čísel $x_1, \ldots, x_n$ platí rovnosť

$$\mathrm{U}_n(e, x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

- Pre každé číslo e je n-árna funkcia f definovaná vzťahom

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{U}_n(e, x_1, \ldots, x_n)$$

  primitívne rekurzívna

Funkciu U_n definujeme predpisom

$$\mathrm{U}_n(e, x_1, \ldots, x_n) = e \bullet \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$$

Univerzálna funkcia nie je primitívne rekurzívna

Dôkaz sporom: predpokladajme, že funkcia U_n je primitívne rekurzívna. Potom aj n-árna funkcia f definovaná vzťahom

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{U}_n(x_1, x_1, \ldots, x_n) + 1 \tag{1}$$

je primitívne rekurzívna. Existuje teda číslo e také, že pre každú n-ticu čísel $x_1, \ldots, x_n$ platí rovnosť

$$\mathrm{U}_n(e, x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n). \tag{2}$$

Postupnými úpravami teraz dostaneme

$$f(e, \ldots, e) \overset{(1)}{=} \mathrm{U}_n(e, e, \ldots, e) + 1 \overset{(2)}{=} f(e, \ldots, e) + 1.$$

Spor.

Graf univerzálnej funkcie nie je primitívne rekurzívny

Dôkaz sporom: predpokladajme, že graf univerzálnej funkcie

$$G_n(e, x_1, \ldots, x_n, y) \leftrightarrow \mathrm{U}_n(e, x_1, \ldots, x_n) = y \tag{3}$$

je p.r. predikát. Potom je primitívne rekurzívny aj n-árny predikát

$$P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow G_n(x_1, x_1, \ldots, x_n, 0). \tag{4}$$

Existuje teda číslo e také, že pre každú n-ticu čísel $x_1, \ldots, x_n$ platí

$$\mathrm{U}_n(e, x_1, \ldots, x_n) = P_*(x_1, \ldots, x_n). \tag{5}$$

Postupnými úpravami teraz dostaneme spor:

$$P(e, \ldots, e) \overset{(4)}{\Leftrightarrow} G_n(e, e, \ldots, e, 0) \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \mathrm{U}_n(e, e, \ldots, e) = 0 \overset{(5)}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow P_*(e, \ldots, e) = 0 \Leftrightarrow \neg P(e, \ldots, e).$$

Obecne rekurzívne funkcie

Dobre založené relácie

Vravíme, že relácia $\vec{x} \prec \vec{y}$ na N^n je dobre založená (tiež noetherianská), ak každá ostro klesajúca postupnosť

$$\vec{x}_1 \succ \vec{x}_2 \succ \vec{x}_3 \succ \vec{x}_4 \succ \cdots$$

je konečná. Tu $\vec{x} \succ \vec{y} \leftrightarrow \vec{y} \prec \vec{x}$.
Úplné dobre založené usporiadanie sa nazýva dobré usporiadanie.

Príklady

- Relácia $\vec{x} \prec \vec{y}$ indukovaná mierou $\mu[\vec{x}]$ do štandardného usporiadania prirodzených čísel je definovaná predpisom

$$\vec{x} \prec \vec{y} \leftrightarrow \mu[\vec{x}] < \mu[\vec{y}].$$

- Lexikografické usporiadanie dvojíc prirodzených čísel

$$(a, b) <_{\mathrm{lex}} (c, d) \leftrightarrow a < c \lor a = c \land b < d.$$

Obecne rekurzívne funkcie

Regulárna rekurzia do dobre založenej relácie $\prec$

Sú to definície v tvare

$$f(\vec{x}) = \tau[f;\vec{x}],$$

pre ktoré sú splnené podmienky regularity. Tie majú tvar

$$\Gamma^{\tau}_{f(\vec{\rho})}[f;\vec{x}] \to \vec{\rho}[f;\vec{x}] \prec \vec{x}$$

pre každú rekurzívnu aplikáciu $f(\vec{\rho})$ strážnenú podmienkou $\Gamma^{\tau}_{f(\vec{\rho})}$.
Splnenie podmienok pre funkciu definovanou pridruženou rovnosťou

$$f(\vec{x}) = \tau\left[[f]^{\prec}_{\vec{x}};\vec{x}\right].$$

Term na pravej strane rovnosti vznikol s termu $\tau[f;\vec{x}]$ nahradením každej rekurzívnej aplikácie $f(\vec{\rho})$ výrazom

$$[f]^{\prec}_{x}(\vec{\rho}) \equiv \textbf{if } \vec{\rho} \prec \vec{x} \textbf{ then } f(\vec{\rho}) \textbf{ else } 0.$$

Obecne rekurzívne funkcie

Definícia triedy obecne rekurzívnych funkcií

- Základné funkcie
  - funkcia nasledovníka $\mathrm{S}(x) = x + 1$
  - funkcia predchodcu $x \dot{-} 1$
- Explicitné definície

$$f(\vec{x}) = \tau[\vec{x}]$$

- Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií

$$f(\vec{x}) = \tau[f; \vec{x}]$$

Predikát je obecne rekurzívny, ak taká je jeho charakterist. funkcia

Príklady

- Ackermannova funkcia
- Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie

Obecne rekurzívne funkcie

Veta

Trieda obecne rekurzívnych funkcií je primitívne rekurzívne uzavretá trieda funkcií

Dôsledok

- *Každá primitívne rekurzívna funkcia je obecne rekurzívna*
- *Každý primitívne rekurzívny predikát je obecne rekurzívny*
- *Obecne rekurzívne predikáty sú uzavreté na explicitné definície predikátov s ohraničenými formulami*
- *Obecne rekurzívne funkcie sú uzavreté na definície funkcií ohraničenou minimalizáciou*

Obecne rekurzívne funkcie

Regulárna minimalizácia

Sú to definície funkcií v tvare

$$f(\vec{x}) = \text{najmenšie číslo } y \text{ také, že platí } \varphi[\vec{x}, y],$$

kde φ je ohraničená formula spĺňajúca podmienku regularity

$$\forall \vec{x} \exists y \varphi[\vec{x}, y]$$

Skrátený zápis

$$f(\vec{x}) = \mu y \left[\varphi[\vec{x}, y]\right]$$

Veta

Trieda obecne rekurzívnych funkcií je uzavretá na definície funkcií regulárnou minimalizáciou

Obecne rekurzívne funkcie

Dôkaz.

Obecná rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$g(y,\vec{x}) = \begin{cases} y & \text{ak } \exists z \leq y\, \varphi[\vec{x},z], \text{ t.j. } y \geq f(\vec{x}) \\ g(y+1,\vec{x}) & \text{ak } \forall z \leq y\, \neg\varphi[\vec{x},z], \text{ t.j. } y < f(\vec{x}) \end{cases}$$

$$f(\vec{x}) = g(0,\vec{x})$$

Pomocná funkcia $g(y,\vec{x})$ je definovaná regulárnou rekurziou do dobrého usporiadania $\prec$ definovaného predpisom

$$(y_1,\vec{x}_1) \prec (y_2,\vec{x}_2) \leftrightarrow f(\vec{x}_1) \dot{-} y_1 < f(\vec{x}_2) \dot{-} y_2$$

Je to (neprediktívna) spätná rekurzia s hornou závorou $f(\vec{x})$
Korektnosť implementácie plynie z tohoto invariantu

$$y \leq f(\vec{x}) \rightarrow g(y,\vec{x}) = f(\vec{x})$$

Obecne rekurzívne funkcie

Veta

Funkcia je obecne rekurzívna práve vtedy, keď jej graf je obecne rekurzívny predikát

Dôkaz.

Nech G je graf funkcie f. Potom zrejme platí

$$G(\vec{x}, y) \leftrightarrow f(\vec{x}) = y$$
$$f(\vec{x}) = \mu y\big[G(\vec{x}, y)\big].$$

Veta je tak jednoduchý dôsledok predošlých tvrdení.

Záver

7. cvičenie

- Výsledky s komentárom nájdete na webe

8. cvičenie

- Začína hneď po prednáške v miestnosti I-H3
- Pracujte samostatne
- Úlohy odovzdať najneskôr do 12:00 v pondelok o dva týždne

9. prednáška

- Návrh programovacieho jazyka deklaratívnej paradigmy
- Kleeneho prvá veta o rekurzii (veta o pevnom bode)

9. cvičenie

- Semestrálny test