1-AIN-625 Úvod do matematickej logiky pre programátorov
1-INF-450 Logika pre informatikov

Zimný semester 2011/12
7. prednáška

Ján Komara

Obsah 7. prednášky

Zopakovanie

Primitívne rekurzívne funkcie

- Základný vývoj primitívne rekurzívnych funkcií
- Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia
- Párovacia funkcia a aritmetizácia (Gödelizácia)
- Rekurzia so substitúciou v parametri
- Vnorená jednoduchá rekurzia
- Regulárne rekurzívne definície s mierou

  $$f(\vec{x}) = \tau[f;\vec{x}]$$

  Podmienky regularity majú tvar

  $$\Gamma^{\tau}_{f(\vec{\rho})}[f;\vec{x}] \rightarrow \mu\big[\vec{\rho}[f;\vec{x}]\big] < \mu[\vec{x}]$$

  pre každú rekurzívnu aplikáciu $f(\vec{\rho})$ strážení podmienkou $\Gamma^{\tau}_{f(\vec{\rho})}$ v terme τ

Zopakovanie

Vnorená jednoduchá rekurzia

Sú to definície v tvare

$$f(0,\vec{y}) = \rho[\vec{y}]$$
$$f(x+1,\vec{y}) = \tau[f(x,\cdot);x,\vec{y}]$$

Alternatívna formulácia (toto je klauzálna forma definície)

$$f(0,\vec{y}) = \rho[\vec{y}]$$
$$f(x+1,\vec{y}) = \theta[x,\vec{z},\vec{y}] \leftarrow \bigwedge_{i=1}^{k} f(x,\vec{\sigma}_i[x,\vec{y},z_1,\dots,z_{i-1}]) = z_i$$

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na vnorenú jednoduchú rekurziu

Rekurzia s mierou

Euklidov algoritmus

Rekurzívna definícia s mierou $\max(x, y)$:

$$
\begin{array}{l}
\gcd(x,y) = \textbf{if } x \neq 0 \wedge y \neq 0 \textbf{ then} \\
\qquad \textbf{case} \\
\qquad\quad x > y \Rightarrow \gcd(x \dot{-} y, y) \\
\qquad\quad x = y \Rightarrow x \\
\qquad\quad x < y \Rightarrow \gcd(x, y \dot{-} x) \\
\qquad \textbf{end} \\
\quad \textbf{else} \\
\qquad \max(x,y)
\end{array}
$$

Podmienky regularity zaručujú, že výpočet vždy skončí

$$
\begin{aligned}
x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge x > y &\rightarrow \max(x \dot{-} y, y) < \max(x, y) \\
x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge x < y &\rightarrow \max(x, y \dot{-} x) < \max(x, y)
\end{aligned}
$$

Rekurzia s mierou

Aproximačná funkcia pre funkciu gcd

Špecifikácia

$$z > \max(x, y) \to f^+(z, x, y) = \mathrm{gcd}(x, y)$$

Definícia aproximačnej funkcie má tvar jednoduchej rekurzie

$$\begin{aligned}
&f^+(0, x, y) = 0 \\
&f^+(z+1, x, y) = \textbf{if } x \neq 0 \land y \neq 0 \textbf{ then} \\
&\qquad\qquad \textbf{case} \\
&\qquad\qquad\quad x > y \Rightarrow f^+(z, x \dot{-} y, y) \\
&\qquad\qquad\quad x = y \Rightarrow x \\
&\qquad\qquad\quad x < y \Rightarrow f^+(z, x, y \dot{-} x) \\
&\qquad\qquad \textbf{end} \\
&\qquad\quad \textbf{else} \\
&\qquad\qquad \max(x, y)
\end{aligned}$$

Primitívna rekurzívnosť $\mathrm{gcd}(x, y) = f^+\big(\max(x, y) + 1, x, y\big)$

Rekurzia s mierou

McCarthyho 91 funkcia

Definícia:

$$f(x) = \begin{cases} 91 & \text{ak } x \leq 101, \\ x \dot{-} 10 & \text{ak } x \geq 101. \end{cases}$$

Alternatívne vyjadrenie pomocou vnorenej rekurzie

$$f(x) = \textbf{if } x < 101 \textbf{ then } f\, f(x+11) \textbf{ else } x \dot{-} 10.$$

Je to korektná definícia?
Tvrdíme, že je to spätná rekurzia s mierou $101 \dot{-} x$. Podmienky regularity majú teda tvar

$$x < 101 \rightarrow 101 \dot{-} (x+11) < 101 \dot{-} x$$
$$x < 101 \rightarrow 101 \dot{-} f(x+11) < 101 \dot{-} x.$$

Ako splniť druhú podmienku?

Rekurzia s mierou

Splnenie podmienok regularity pre McCarthyho 91 funkciu

Uvažujme funkciu f definovanou rekurzívnou rovnosťou

$$f(x) = \textbf{if } x < 101 \textbf{ then } [f]_x[f]_x(x+11) \textbf{ else } x \dot{-} 10. \tag{1}$$

Tu $[f]_x(y)$ je *zúženie* f na vstupy y také, že $101 \dot{-} y < 101 \dot{-} x$, t.j.

$$[f]_x(y) \equiv \textbf{if } 101 \dot{-} y < 101 \dot{-} x \textbf{ then } f(y) \textbf{ else } 0. \tag{2}$$

Každá rekurzívna aplikácia v (1) je strážená kontextom (2). Je to korektná definícia.

Funkcia f spĺňa podmienky regularity pôvodnej rekurzívnej rovnice:

$$x < 101 \rightarrow 101 \dot{-} (x+11) < 101 \dot{-} x$$
$$x < 101 \rightarrow 101 \dot{-} f(x+11) < 101 \dot{-} x$$

Táto funkcia je tiež jediným riešením pôvodnej rekurzívnej rovnice.

Rekurzia s mierou

Rekurzia s mierou (syntaktická verzia)

Sú to definície v tvare

$$f(\vec{x}) = \tau\left[[f]^{\mu}_{\vec{x}}; \vec{x}\right].$$

Term na pravej strane rovnosti vznikol s termu $\tau[f; \vec{x}]$ nahradením každej rekurzívnej aplikácie $f(\vec{\rho})$ výrazom

$$[f]_x(\vec{\rho}) \equiv \textbf{if } \mu[\vec{\rho}] < \mu[\vec{x}] \textbf{ then } f(\vec{\rho}) \textbf{ else } 0.$$

Tu $\mu[\vec{x}]$ sa nazýva miera. Číslo $\mu[\vec{x}] + 1$ predstavuje horný odhad na hĺbku výpočtového stromu pre výpočet aplikácie $f(\vec{x})$.

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na rekurziu s mierou.

Rekurzia s mierou

Dôkaz

Pomocou aproximačnej funkcie, ktorá má túto základnú vlastnosť:

$$z > \mu[\vec{x}] \rightarrow f^+(z, \vec{x}) = f(\vec{x})$$

Jej definícia má tvar vnorenej jednoduchej rekurzie

$$\begin{aligned} f^+(0, \vec{x}) &= 0 \\ f^+(z+1, \vec{x}) &= \tau\left[[f^+]^{\mu}_{z,\vec{x}}; z, \vec{x}\right] \end{aligned}$$

Term na pravej strane druhej rovnosti vznikol s termu $\tau[f; \vec{x}]$ nahradením každej rekurzívnej aplikácie $f(\vec{\rho})$ výrazom

$$[f^+]^{\mu}_{z,\vec{x}}(\vec{\rho}) \equiv \textbf{if } \mu[\vec{\rho}] < \mu[\vec{x}] \textbf{ then } f^+(z, \vec{\rho}) \textbf{ else } 0$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$f(\vec{x}) = f^+(\mu[\vec{x}] + 1, \vec{x})$$

Rekurzia s mierou

Regulárna rekurzia s mierou $\mu[\vec{x}]$

Sú to definície v tvare

$$f(\vec{x}) = \tau[f;\vec{x}],$$

pre ktoré sú splnené podmienky regularity. Tie majú tvar

$$\Gamma^{\tau}_{f(\vec{\rho})}[f;\vec{x}] \rightarrow \mu[\vec{\rho}[f;\vec{x}]] < \mu[\vec{x}]$$

pre každú rekurzívnu aplikáciu $f(\vec{\rho})$ strážený podmienkou $\Gamma^{\tau}_{f(\vec{\rho})}$.
Splnenie podmienok pre funkciu definovanou pridruženou rovnosťou

$$f(\vec{x}) = \tau\left[[f]^{\mu}_{\vec{x}};\vec{x}\right].$$

Veta

Primit. rekurz. funkcie sú uzavreté na regulárnu rekurziu s mierou.

Rekurzia s mierou

Charakterizačný problém

Veta

Trieda primitívne rekurzívnych funkcií je najmenšia trieda funkcií, ktorá obsahuje funkciu nasledovníka $x+1$, funkciu predchodcu $x \dot{-} 1$ a je uzavretá na explicitné definície a regulárnu rekurziu s mierou

Dôkaz.

Primitívne rekurzívna definícia funkcie $f(x, \vec{y})$ v tvare

$$f(0, \vec{y}) = g(\vec{y})$$
$$f(x+1, \vec{y}) = h\big(x, f(x, \vec{y}), \vec{y}\big)$$

je špeciálnym prípadom regulárnej rekurzívnej definície

$$f(x, \vec{y}) = \textbf{if } x \neq 0 \textbf{ then } h\big(x \dot{-} 1, f(x \dot{-} 1, \vec{y}), \vec{y}\big) \textbf{ else } g(\vec{y})$$

s mierou $\mu[x, \vec{y}] = x$

Efektívne operácie na primitívne rekurzívnych indexoch

Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie

Špecifikácia

Interpreter programovacieho jazyka p.r. odvodení je binárna funkcia $e \bullet x$, ktorá má tieto dve základné vlastnosti:

- Pre každé $f \in \mathrm{PR}^n$ a $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{N}$ platí rovnosť:

$$\ulcorner f \urcorner \bullet \langle x_1, \ldots, x_n \rangle = f^{\mathcal{N}}(x_1, \ldots, x_n)$$

- Pre každé číslo $e \in \mathrm{N}$, unárna funkcia

$$f(x) = e \bullet x$$

  je primitívne rekurzívna funkcia

Efektívne operácie na primitívne rekurzívnych indexoch

Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie

Implementácia

Klauzálna forma definície

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Z} \bullet x &= 0 \\
\boldsymbol{S} \bullet x &= x + 1 \\
\boldsymbol{I}_i^n \bullet x &= [x]_i^n \\
\boldsymbol{\langle} g \boldsymbol{,} gs \boldsymbol{\rangle} \bullet x &= \left\langle g \bullet x, gs \bullet x \right\rangle \\
\boldsymbol{Comp}_m^n(h, gs) \bullet x &= h \bullet (gs \bullet x) \\
\boldsymbol{Rec}_n(g, h) \bullet \langle 0, y \rangle &= g \bullet y \\
\boldsymbol{Rec}_n(g, h) \bullet \langle x + 1, y \rangle &= h \bullet \left\langle x, \boldsymbol{Rec}_n(g, h) \bullet \langle x, y \rangle, y \right\rangle
\end{aligned}
$$

Je to vnorená dvojitá rekurzia

Efektívne operácie na primitívne rekurzívnych indexoch

Primitívne rekurzívne indexy

Definícia

Prirodzené číslo e také, že

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n f(x_1, \ldots, x_n) = e \bullet \langle x_1, \ldots, x_n \rangle,$$

sa nazýva primitívne rekurzívny index funkcie f

Veta

Funkcia je primitívne rekurzívna práve vtedy, keď má primitívne rekurzívny index

Definícia

Predikát $Prf(n, e)$ platí, ak číslo e je dobre vytvorený primitívne rekurzívny index nejakej n-árnej p.r. funkcie, t.j. $e = \ulcorner f \urcorner$ pre nejaké $f \in \mathrm{PR}^n$

Príklad

Primitívne rekurzívne odvodenie operácie sčítania

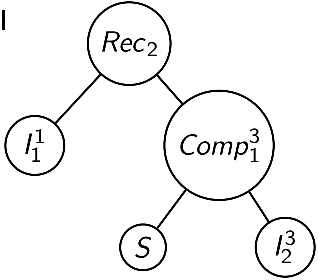
$$
\begin{aligned}
& & h(x,z,y) &= \mathsf{S}\,\mathsf{I}^3_2(x,z,y) \\
0 + y &= y & 0 + y &= \mathsf{I}(y) \\
x + 1 + y &= x + y + 1 & \mathsf{S}(x) + y &= h(x, x+y, y)
\end{aligned}
$$

Primitívne rekurzívny funkčný symbol

$$Rec_2(I^1_1, Comp^3_1(S, I^3_2))$$

a jeho aritmetizácia (p.r. index)

$$\boldsymbol{Rec}_2(\boldsymbol{I}^1_1, \boldsymbol{Comp}^3_1(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{I}^3_2))$$



Efektívne operácie na primitívne rekurzívnych indexoch

Konštantné funkcie

Špecifikácia unárnej p.r. funkcie $\mathcal{C}_m$:

$$Prf(1, \mathcal{C}_m) \land \forall x\, \mathcal{C}_m \bullet x = m$$

Návod na riešenie:

$$\mathsf{C}_0 = \mathsf{Z} \qquad \mathsf{C}_{m+1}(x) = \mathsf{S}\,\mathsf{C}_m(x)$$

Špecifikácia binárnej p.r. funkcie $\mathcal{C}^n_m$: pre každé $n \geq 1$ platí

$$Prf(n, \mathcal{C}^n_m) \land \forall x_1 \ldots \forall x_n\, \mathcal{C}^n_m \bullet \langle x_1, \ldots, x_n \rangle = m$$

Návod na riešenie:

$$\mathsf{C}^n_m(x_1, \ldots, x_n) = \mathsf{C}_m\, \mathsf{I}^n_1(x_1, \ldots, x_n)$$

Efektívne operácie na primitívne rekurzívnych indexoch

Explicitné definície

Symbolom $\ulcorner \lambda\vec{x}.\tau \urcorner$ označujeme p.r. index funkcie f definovanej explicitne s p.r. funkcií predpisom (tu $\vec{x} \equiv x_1, \ldots, x_n$):

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tau[x_1, \ldots, x_n]$$

Špecifikácia

$$\ulcorner \lambda\vec{x}.\tau \urcorner \bullet \langle x_1, \ldots, x_n \rangle = \tau[x_1, \ldots, x_n]$$

Implementácia

$$\begin{aligned} \ulcorner \lambda\vec{x}.x_i \urcorner &= \boldsymbol{I}^n_i \\ \ulcorner \lambda\vec{x}.m \urcorner &= \boldsymbol{C}^n_m \\ \ulcorner \lambda\vec{x}.g(\tau_1, \ldots, \tau_m) \urcorner &= \boldsymbol{Comp}^n_m\big(\ulcorner g \urcorner, \boldsymbol{\langle} \ulcorner \lambda\vec{x}.\tau_1 \urcorner \boldsymbol{,} \ldots \boldsymbol{,} \ulcorner \lambda\vec{x}.\tau_m \urcorner \boldsymbol{\rangle}\big) \end{aligned}$$

Aritmetizácia úlohy ...

Efektívne operácie na primitívne rekurzívnych indexoch

Iterácia unárnej funkcie

Špecifikácia unárnej p.r. funkcie $\boldsymbol{Iter}(e)$:

$$
\begin{aligned}
Prf(1,e) &\to Prf\bigl(2,\boldsymbol{Iter}(e)\bigr)\\
\boldsymbol{Iter}(e)\bullet\langle 0,x\rangle &= x\\
\boldsymbol{Iter}(e)\bullet\langle n+1,x\rangle &= e\bullet\bigl(\boldsymbol{Iter}(e)\bullet\langle n,x\rangle\bigr)
\end{aligned}
$$

Návod na riešenie: ak e je p.r. index unárnej funkcie f, potom $\boldsymbol{Iter}(e)$ je p.r. index jej iterácie $f^n(x)$ definovanej vzťahom

$$
\begin{aligned}
f^0(x) &= x\\
f^{n+1}(x) &= f\,f^n(x)
\end{aligned}
$$

Príklad

$$x+y=\mathsf{S}^x(y)=\mathsf{S}^y(x)$$

Efektívne operácie na primitívne rekurzívnych indexoch

Parametrická funkcia

Špecifikácia binárnej p.r. funkcie e/x:

$$Prf(2, e) \to Prf(1, e/x)$$
$$(e/x) \bullet y = e \bullet \langle x, y \rangle$$

Návod na riešenie: ak e je p.r. index binárnej funkcie f a $x \in \mathrm{N}$, potom e/x je p.r. index unárnej funkcie g definovanej vzťahom

$$g(y) = f(x, y)$$

Platí teda

$$e/x = \ulcorner \lambda y.f(x, y) \urcorner$$

Alternatívne riešenie vychádza z tohoto vyjadrenia

$$g(y) = f(x, y) = f\big(\mathrm{C}_x(y), \mathrm{I}(y)\big)$$

Záver

6. cvičenie

- Výsledky s komentárom nájdete na webe

7. cvičenie

- Začína hneď po prednáške v miestnosti I-H3
- Pracujte samostatne
- Úlohy odovzdať najneskôr do 12:00 v pondelok budúci týždeň

8. prednáška

- Poza primitívnu rekurziu
  - Ackermann-Péterovej funkcia
  - Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie
- Obecne rekurzívne funkcie