1-AIN-625 Úvod do matematickej logiky pre programátorov
1-INF-450 Logika pre informatikov

Zimný semester 2011/12

6. prednáška

Ján Komara

Obsah 6. prednášky

Zopakovanie

Vnorená jednoduchá rekurzia

Záver

Zopakovanie

Primitívne rekurzívne funkcie

- Základný vývoj primitívne rekurzívnych funkcií
- Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia
- Párovacia funkcia a aritmetizácia (Gödelizácia)
- Rekurzia so substitúciou v parametri
- Vnorená jednoduchá rekurzia

$$
\begin{aligned}
f(0, y) &= g(y) \\
f(x+1, y) &= h\Big(x, f\left(x, s_1(x, y)\right), f\left(x, s_2(x, y, f(x, s_1(x, y)))\right), y\Big)
\end{aligned}
$$

- Regulárne rekurzívne definície s mierou

$$f(\vec{x}) = \tau[f; \vec{x}]$$

Podmienka regularity $\Gamma_{f(\vec{\rho})} \rightarrow \mu[\vec{\rho}] < \mu[\vec{x}]$ pre rekurzívne volanie $f(\vec{\rho})$ funkcie f v terme τ

Zopakovanie

Rekurzia so substitúciou v parametri

Sú to definície v tvare

$$f(0, \vec{y}) = \rho[\vec{y}]$$
$$f(x+1, \vec{y}) = \tau\big[x, f(x, \vec{\sigma}_1[x, \vec{y}]), \ldots, f(x, \vec{\sigma}_k[x, \vec{y}]), \vec{y}\big]$$

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na rekurziu so substitúciou v parametri

Poznámka

Vetu sme dokázali pre prípad $k = 1$

Vnorená jednoduchá rekurzia

Vnorená jednoduchá rekurzia

Sú to definície v tvare

$$f(0, \vec{y}) = \rho[\vec{y}]$$
$$f(x+1, \vec{y}) = \tau[f(x, \cdot); x, \vec{y}]$$

Alternatívna formulácia (toto je klauzálna forma definície)

$$f(0, \vec{y}) = \rho[\vec{y}]$$
$$f(x+1, \vec{y}) = \theta[x, \vec{z}, \vec{y}] \leftarrow \bigwedge_{i=1}^{k} f(x, \vec{\sigma}_i[x, \vec{y}, z_1, \ldots, z_{i-1}]) = z_i$$

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na vnorenú jednoduchú rekurziu

Vnorená jednoduchá rekurzia

Dôkaz vety pre prípad $k = 2$ a jeden parameter, časť prvá

Uvažujme definíciu v tvare

$$
\begin{aligned}
f(0, y) &= g(y) \\
f(x+1, y) &= h\Big(x, f(x, \sigma_1[x, y]), f\left(x, \sigma_2\left[x, y, f(x, \sigma_1[x, y])\right]\right), y\Big)
\end{aligned}
$$

Ukážeme najprv, že funkcia histórie $\overline{f}$:

$$
\begin{aligned}
\overline{f}(0, y) &= \big\langle f(0, y), 0, 0 \big\rangle \\
\overline{f}(x+1, y) &= \Big\langle f(x+1, y), \overline{f}\left(x, \sigma_1[x, y]\right), \\
&\qquad \overline{f}\left(x, \sigma_2\left[x, y, f(x, \sigma_1[x, y])\right]\right) \Big\rangle
\end{aligned}
$$

je primitívne rekurzívna funkcia

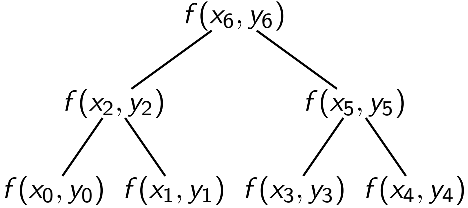
Primitívna rekurzívnosť funkcie f potom plynie z tohoto vyjadrenia

$$
f(x, y) = \pi_1\, \overline{f}(x, y)
$$

Vnorená jednoduchá rekurzia

Dôkaz vety pre prípad $k = 2$ a jeden parameter, časť druhá

Príklad výpočtového stromu pre aplikáciu v tvare $f(2, \cdot)$:



Postupnosť histórie pre aplikáciu $f(x, y)$

$$f(x_0, y_0), f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), \ldots, f(x_j, y_j), \ldots, f(x_i, y_i), \ldots$$

odpovedá spätnému prechodu výpočtového stromu $\overline{f}(x, y)$

Vnorená jednoduchá rekurzia

Dôkaz vety pre prípad $k = 2$ a jeden parameter, časť tretia

Funkcia $U(x, y, t, i)$ modifikuje čiastočný výpočtový strom t pre aplikáciu $f(x, y)$ v pozícií i hodnotou $f(x_i, y_i)$:

$$U(0, y, t, i) = \langle g(y), 0, 0\rangle$$

$$U(x+1, y, t, i) = \begin{cases} \Big\langle z, U\big(x, \sigma_1[x, y], l, i\big), r\Big\rangle & \text{ak } i < 2^{x+1} \dot{-} 1 \text{ a } t = \langle z, l, r\rangle \text{ pre nejaké } z, l, r \\ \Big\langle z, l, U\big(x, \sigma_2[x, y, \pi_1(l)], r, j\big)\Big\rangle & \text{ak } i = 2^{x+1} \dot{-} 1 + j \text{ pre } j < 2^{x+1} \dot{-} 1 \text{ a } t = \langle z, l, r\rangle \text{ pre nejaké } z, l, r \\ \Big\langle h\big(x, \pi_1(l), \pi_1(r), y\big), l, r\Big\rangle & \text{ak } i = 2^{x+2} \dot{-} 2 \text{ a } t = \langle z, l, r\rangle \text{ pre nejaké } z, l, r \\ 0 & \text{ináč} \end{cases}$$

Je to klauzálna forma primitívnej rekurzie so substitúciou v parametri, funkcia je preto primitívne rekurzívna

Vnorená jednoduchá rekurzia

Dôkaz vety pre prípad $k = 2$ a jeden parameter, časť štvrtá

Funkcia $M_i(x, y, t)$ modifikuje čiastočný výpočtový strom t pre aplikáciu $f(x, y)$ v každej pozícií $j < i$ hodnotou $f(x_j, y_j)$:

$$\begin{aligned} M_0(x, y, t) &= t \\ M_{i+1}(x, y, t) &= U\big(x, y, M_i(x, y, t), i\big) \end{aligned}$$

Funkcia $Full(n)$ vytvorí úplný binárny strom hĺbky n:

$$\begin{aligned} Full(0) &= 0 \\ Full(n+1) &= \big\langle 0, Full(n), Full(n) \big\rangle \end{aligned}$$

Funkcia $\overline{f}$(x,y) vytvorí úplný výpočtový strom pre aplikáciu $f(x, y)$:

$$\overline{f}(x, y) = M_{2^{x+1} \dot{-} 1}\big(x, y, Full(x+1)\big)$$

Všetky funkcie sú primitívne rekurzívne

Vnorená jednoduchá rekurzia

Dôkaz vety pre prípad $k = 4$ a jeden parameter, časť prvá

Uvažujme definíciu v tvare (toto je klauzálna forma definície)

$$
\begin{aligned}
& f(0, y) = g(y) \\
& f(x+1, y) = h(x, z_1, z_2, z_3, z_4, y) \leftarrow \\
& \qquad f(x, \sigma_1[x, y]) = z_1 \wedge f(x, \sigma_2[x, y, z_1]) = z_2 \wedge \\
& \qquad f(x, \sigma_3[x, y, z_1, z_2]) = z_3 \wedge f(x, \sigma_4[x, y, z_1, z_2, z_3]) = z_4
\end{aligned}
$$

Funkciu f zavedieme ako primitívne rekurzívnu s pomocou binárnej p.r. funkcie $\hat{f}$, ktorá má tieto základné vlastnosti:

$$\hat{f}(2x, y) = f(x, y)$$

$$
\begin{aligned}
f(x, \sigma_1[x, y]) = z_1 \wedge f(x, \sigma_2[x, y, z_1]) = z_2 \rightarrow \\
\hat{f}\big(2x+1, \langle 1, y \rangle\big) = \langle z_1, z_2 \rangle \\
f(x, \sigma_3[x, y, z_1, z_2]) = z_3 \wedge f(x, \sigma_4[x, y, z_1, z_2, z_3]) = z_4 \rightarrow \\
\hat{f}\big(2x+1, \langle 2, y, z_1, z_2 \rangle\big) = \langle z_3, z_4 \rangle
\end{aligned}
$$

Vnorená jednoduchá rekurzia

Dôkaz vety pre prípad $k = 4$ a jeden parameter, časť druhá

Primitívna rekurzívnosť funkcie $\hat{f}$ plynie z tohoto vyjadrenia

$$
\begin{aligned}
&\hat{f}(0, y) = g(y) \\
&\hat{f}(2x+1, \langle 1, y\rangle) = \langle z_1, z_2\rangle \leftarrow \\
&\qquad \hat{f}(2x, \sigma_1[x, y]) = z_1 \wedge \hat{f}(2x, \sigma_2[x, y, z_1]) = z_2 \\
&\hat{f}(2x+1, \langle 2, y, z_1, z_2\rangle) = \langle z_3, z_4\rangle \leftarrow \\
&\qquad \hat{f}(2x, \sigma_3[x, y, z_1, z_2]) = z_3 \wedge \hat{f}(2x, \sigma_4[x, y, z_1, z_2, z_3]) = z_4 \\
&\hat{f}\big(2x+2, y\big) = h(x, z_1, z_2, z_3, z_4, y) \leftarrow \\
&\qquad \hat{f}(2x+1, \langle 1, y\rangle) = \langle z_1, z_2\rangle \wedge \hat{f}(2x+1, \langle 2, y, z_1, z_2\rangle) = \langle z_3, z_4\rangle
\end{aligned}
$$

Je to klauzálna forma primitívnej rekurzie so substitúciou v parametri

Primitívna rekurzívnosť funkcie f potom plynie z tohoto vyjadrenia

$$f(x, y) = \hat{f}(2x, y)$$

Záver

5. cvičenie

- Výsledky s komentárom nájdete na webe

6. cvičenie

- Začína hneď po prednáške v miestnosti I-H3
- Pracujte samostatne
- Úlohy odovzdať najneskôr do 12:00 v pondelok o dva týždne

7. prednáška

- Regulárne rekurzívne definície s mierou