1-AIN-625 Úvod do matematickej logiky pre programátorov
1-INF-450 Logika pre informatikov

Zimný semester 2011/12
5. prednáška

Ján Komara

Obsah 5. prednášky

Zopakovanie

Primitívne rekurzívne funkcie

- Základný vývoj primitívne rekurzívnych funkcií
- Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia
- Párovacia funkcia a aritmetizácia (Gödelizácia)
- Rekurzia so substitúciou v parametri

$$
\begin{aligned}
f(0, y) &= g(y) \\
f(x+1, y) &= h\big(x, f(x, s(x, y)), y\big)
\end{aligned}
$$

- Vnorená jednoduchá rekurzia

$$
\begin{aligned}
f(0, y) &= g(y) \\
f(x+1, y) &= h\Big(x, f\big(x, s_1(x, y)\big), f\big(x, s_2(x, y, f(x, s_1(x, y)))\big), y\Big)
\end{aligned}
$$

- Regulárne rekurzívne definície s mierou

Zopakovanie

Cantorova párovacia funkcia (modifikovaná verzia)

$\langle x, y\rangle$	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
0	1	2	4	7	11	16	22	$\cdots$
1	3	5	8	12	17	23	30	$\cdots$
2	6	9	13	18	24	31	39	$\cdots$
3	10	14	19	25	32	40	49	$\cdots$
4	15	20	26	33	41	50	60	$\cdots$
5	21	27	34	42	51	61	72	$\cdots$
6	28	35	43	52	62	73	85	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=0}^{x+y} i + 1 + x$$

Zopakovanie

Vlastnosti párovacej funkcie

Modifikovaná verzia Cantorovej párovacej funkcie má tieto základné vlastnosti:

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \langle y_1, y_2 \rangle \rightarrow x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2$$
$$x < \langle x, y \rangle \wedge y < \langle x, y \rangle$$
$$x = 0 \vee \exists y \exists z\, x = \langle y, z \rangle$$

Pre $n \geq 3$ zapisujeme $\big\langle x_1, \langle x_2, \ldots, x_n \rangle \big\rangle$ skrátene $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$

Projekcie

Unárne projekcie π_1 a π_2 spĺňajú tieto identity:

$$\pi_1\langle x, y \rangle = x \qquad \pi_2\langle x, y \rangle = y \qquad \pi_1(0) = 0 = \pi_2(0)$$

Zopakovanie

Aritmetizácia karteziánskeho súčinu

Kódom n-tice $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{N}^n$ je číslo

$$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in \mathrm{N}$$

Binárny primitívne rekurzívny predikát $\mathit{Tuple}(n, x)$ platí, ak číslo x je kódom nejakej n-tice prirodzených čísel:

$$\mathit{Tuple}(n, x) \leftrightarrow n = 0 \wedge x = 0 \vee n = 1 \vee n \geq 2 \wedge \pi_2^{n-2}(x) \neq 0$$

Zobecnením projekcií π_1, π_2 je ternárna funkcia $[x]_i^n$ taká, že

$$[\langle x_1, \ldots, x_n \rangle]_i^n = x_i \qquad \text{pre } 1 \leq i \leq n$$

Primitívna rekurzívnosť plynie z tohoto vyjadrenia

$$[x]_i^n = \textbf{if } i \neq n \textbf{ then } \pi_1 \pi_2^{i \dot{-} 1}(x) \textbf{ else } \pi_2^{n \dot{-} 1}(x)$$

Zopakovanie

Aritmetizácia konečných postupností

Kódom konečnej postupnosti $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathrm{N}^n$ je číslo

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, 0\rangle$$

Kódom prázdnej postupnosti $\emptyset$ je číslo 0
Funkcia $\mathsf{L}(x)$ vypočíta dĺžku postupnosti x:

$$\mathsf{L}\,\langle x_1, \ldots, x_n, 0\rangle = n$$

Binárna operácia $(x)_i$ vráti $(i+1)$-vý prvok postupnosti x:

$$\big(\langle x_0, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1}, 0\rangle\big)_i = x_i \qquad \text{pre } i < n$$

Primitívna rekurzívnosť plynie z tohoto vyjadrenia

$$\mathsf{L}(x) = \mu n \leq x[\pi_2^n(x) = 0] \qquad\qquad (x)_i = \pi_1\,\pi_2^i(x)$$

Spätná rekurzia

Spätná rekurzia

Sú to definície v tvare

$$f(x,\vec{y}) = \begin{cases} \rho[x,\vec{y}] & \text{ak } x \geq \theta[\vec{y}] \\ \tau\,[x, f(x+1,\vec{y}),\vec{y}] & \text{ak } x < \theta[\vec{y}] \end{cases}$$

Je to špeciálny prípad rekurzie s mierou $\theta[\vec{y}] \dot{-} x$
Podmienky regularity:

$$x < \theta[\vec{y}] \rightarrow \theta[\vec{y}] \dot{-} (x+1) < \theta[\vec{y}] \dot{-} x$$

Zdôvodnenie: $x < \theta[\vec{y}] \rightarrow x < x+1 \leq \theta[\vec{y}]$

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na spätnú rekurziu

Spätná rekurzia

Dôkaz vety pre špeciálny prípad

Uvažujme najprv definíciu v tvare

$$f(x,y) = \begin{cases} g(y) & \text{ak } x \geq b(y) \\ h\big(x, f(x+1,y), y\big) & \text{ak } x < b(y) \end{cases}$$

Tvrdíme, že existuje p.r. funkcia $\hat{f}$ taká, že

$$v + x = b(y) \to \hat{f}(v,y) = f(x,y)$$

Dôkaz:

$$\begin{aligned} \hat{f}(0,y) &= g(y) \\ \hat{f}(v+1,y) &= h\big(b(y) \dot{-} (v+1), \hat{f}(v,y), y\big) \end{aligned}$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$f(x,y) = \hat{f}\big(b(y) \dot{-} x, y\big)$$

Spätná rekurzia

Dôkaz vety pre obecný prípad

Uvažujme teraz definíciu v tvare

$$f(x,y) = \begin{cases} g(x,y) & \text{ak } x \geq b(y) \\ h\big(x, f(x+1,y), y\big) & \text{ak } x < b(y) \end{cases}$$

Tvrdíme, že existuje p.r. funkcia $\hat{f}$ taká, že

$$v + x = b(y) \rightarrow \hat{f}(v,y) = f(x,y)$$

Dôkaz:

$$\hat{f}(0,y) = g\big(b(y), y\big) \quad \hat{f}(v+1,y) = h\big(b(y) \dot{-} (v+1), \hat{f}(v,y), y\big)$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$f(x,y) = \begin{cases} g(x,y) & \text{ak } x \geq b(y) \\ \hat{f}\big(b(y) \dot{-} x, y\big) & \text{ak } x \leq b(y) \end{cases}$$

Rekurzia so substitúciou v parametri

Príklad

Fibonacciho postupnosť

$$f_0 = 0 \qquad f_1 = 1 \qquad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

Efektívna implementácia

$$\begin{aligned} g(0, a, b) &= a \\ g(n+1, a, b) &= g(n, a+b, a) \\ f_0 &= 0 \\ f_{n+1} &= g(n, 1, 0) \end{aligned}$$

Pomocná funkcia $g(n, a, b)$ je definovaná rekurziou podľa n so substitúciou v parametri a a b

Korektnosť implementácie plynie z tejto vlastnosti

$$g\left(n, f_{k+1}, f_k\right) = f_{n+1+k}$$

Rekurzia so substitúciou v parametri

Rekurzia so substitúciou v parametri

Sú to definície v tvare

$$\begin{aligned} f(0, \vec{y}) &= \rho[\vec{y}] \\ f(x+1, \vec{y}) &= \tau\big[x, f(x, \vec{\sigma}_1[x, \vec{y}]), \ldots, f(x, \vec{\sigma}_k[x, \vec{y}]), \vec{y}\big] \end{aligned}$$

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na rekurziu so substitúciou v parametri

Poznámka

Vetu dokážeme pre prípad $k = 1$

Rekurzia so substitúciou v parametri

Dôkaz vety pre prípad $k = 1$ a jeden parameter, časť prvá

Uvažujme definíciu v tvare

$$\begin{aligned} f(0, y) &= g(y) \\ f(x+1, y) &= h\big(x, f(x, \sigma[x, y]), y\big) \end{aligned}$$

Ukážeme, že funkcia histórie $\overline{f}$:

$$\begin{aligned} \overline{f}(0, y) &= \big\langle f(0, y), 0 \big\rangle \\ \overline{f}(x+1, y) &= \big\langle f(x+1, y), \overline{f}(x, \sigma[x, y]) \big\rangle \end{aligned}$$

je primitívne rekurzívna

Primitívna rekurzívnosť funkcie f potom plynie z tohoto vyjadrenia

$$f(x, y) = \big(\overline{f}(x, y)\big)_0$$

Rekurzia so substitúciou v parametri

Dôkaz vety pre prípad $k = 1$ a jeden parameter, časť druhá

Selektor pre rekurzívne argumenty

$$\mathbf{x}_i(x) = x \dot{-} i$$

Selektor pre parametre

$$\mathbf{y}_0(x, y) = y \qquad \mathbf{y}_{i+1}(x, y) = \sigma[\mathbf{x}_i(x) \dot{-} 1, \mathbf{y}_i(x, y)]$$

Funkcia čiastočnej histórie (tu $s = \overline{f}(x, y).(i + 1)$)

$$\overline{f}(x, y).i = \begin{cases} \left\langle g\big(\mathbf{y}_i(x, y)\big), 0 \right\rangle & \text{ak } i \geq x \\ \left\langle h\big(\mathbf{x}_i(x) \dot{-} 1, (s)_0, \mathbf{y}_i(x, y)\big), s \right\rangle & \text{ak } i < x \end{cases}$$

Funkcia histórie

$$\overline{f}(x, y) = \overline{f}(x, y).0$$

Rekurzia so substitúciou v parametri

Rekurzia so substitúciou v parametri a kontrakcia parametrov

Uvažujme definíciu v tvare

$$
\begin{aligned}
f(0, y_1, y_2) &= g(y_1, y_2) \\
f(x+1, y_1, y_2) &= h\big(x, f(x, \sigma_1[x, y_1, y_2], \sigma_2[x, y_1, y_2]), y_1, y_2\big)
\end{aligned}
$$

Ukážeme najprv, že binárna funkcia $\langle f \rangle(x, \langle y_1, y_2 \rangle) = f(x, y_1, y_2)$ je primitívne rekurzívna:

$$
\begin{aligned}
&\langle f \rangle(0, y) = g\big([y]^2_1, [y]^2_2\big) \\
&\langle f \rangle(x+1, y) = \\
&\quad h\Big(x, \langle f \rangle\Big(x, \Big\langle \sigma_1\big[x, [y]^2_1, [y]^2_2\big], \sigma_2\big[x, [y]^2_1, [y]^2_2\big] \Big\rangle\Big), [y]^2_1, [y]^2_2\Big)
\end{aligned}
$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$
f(x, y_1, y_2) = \langle f \rangle(x, \langle y_1, y_2 \rangle)
$$

Rekurzia so substitúciou v parametri

Rekurzia so substitúciou v parametri a analýza prípadov

Uvažujme definíciu v tvare

$$
\begin{aligned}
f(0,y) &= g(y) \\
f(x+1,y) &= \begin{cases} h_1\big(x, f(x,\sigma_1[x,y]), y\big) & \text{ak } R(x,y) \\ h_2\big(x, f(x,\sigma_2[x,y]), y\big) & \text{ak } \neg R(x,y) \end{cases}
\end{aligned}
$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$
\begin{aligned}
h(x,z,y) &= \mathrm{D}\big(R_*(x,y), h_1(x,z,y), h_2(x,z,y)\big) \\
\sigma[x,y] &= \mathrm{D}\big(R_*(x,y), \sigma_1[x,y], \sigma_2[x,y]\big) \\
f(0,y) &= g(y) \\
f(x+1,y) &= h\big(x, f(x,\sigma[x,y]), y\big)
\end{aligned}
$$

Záver

4. cvičenie

- Výsledky s komentárom nájdete na webe

5. cvičenie

- Začína hneď po prednáške v miestnosti I-H3
- Pracujte samostatne
- Úlohy odovzdať najneskôr do 12:00 v pondelok budúci týždeň

6. prednáška

- Vnorená jednoduchá rekurzia

$$
\begin{aligned}
f(0, y) &= g(y) \\
f(x+1, y) &= h\Big(x, f\left(x, s_1(x, y)\right), f\left(x, s_2(x, y, f(x, s_1(x, y)))\right), y\Big)
\end{aligned}
$$