1-AIN-625 Úvod do matematickej logiky pre programátorov
1-INF-450 Logika pre informatikov

Zimný semester 2011/12

4. prednáška

Ján Komara

Obsah 4. prednášky

Zopakovanie

Primitívne rekurzívne funkcie

- Základný vývoj primitívne rekurzívnych funkcií
- Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia
- Párovacia funkcia a aritmetizácia (Gödelizácia)
- Rekurzia so substitúciou v parametri

$$\begin{aligned} f(0,y) &= g(y) \\ f(x+1,y) &= h\big(x, f(x, s(x,y)), y\big) \end{aligned}$$

- Vnorená jednoduchá rekurzia

$$\begin{aligned} f(0,y) &= g(y) \\ f(x+1,y) &= h\Big(x, f\left(x, s_1(x,y)\right), f\left(x, s_2(x,y,f(x,s_1(x,y)))\right), y\Big) \end{aligned}$$

- Regulárne rekurzívne definície s mierou

Zopakovanie

Explicitné definície

Sú to definície v tvare

$$f(\vec{x}) = \tau[\vec{x}]$$

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na explicitné definície

Primitívne rekurzívne definície

Sú to definície v tvare

$$\begin{aligned} f(\vec{y}, 0, \vec{z}) &= \rho[\vec{y}, \vec{z}] \\ f(\vec{y}, x+1, \vec{z}) &= \tau[\vec{y}, x, f(\vec{y}, x, \vec{z}), \vec{z}] \end{aligned}$$

Veta

Prim. rek. funkcie sú uzavreté na primitívne rekurzívne definície

Zopakovanie

Explicitné definície predikátov s ohraničenými formulami

Sú to definície predikátov v tvare (φ je ohraničená formula)

$$P(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi[\vec{x}]$$

Veta

Primitívne rekurzívne predikáty sú uzavreté na explicitné definície predikátov s ohraničenými formulami

Ohraničená minimalizácia

Sú to definície funkcií v tvare (φ je ohraničená formula)

$$f(\vec{x}) = \mu y \leq \tau[\vec{x}]\big[\varphi[\vec{x}, y]\big]$$

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na definície funkcií ohraničenou minimalizáciou

Párovacia funkcia

Cantorova párovacia funkcia

$J(x,y)$	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
0	0	1	3	6	10	15	21	$\cdots$
1	2	4	7	11	16	22	29	$\cdots$
2	5	8	12	17	23	30	38	$\cdots$
3	9	13	18	24	31	39	48	$\cdots$
4	14	19	25	32	40	49	59	$\cdots$
5	20	26	33	41	50	60	71	$\cdots$
6	27	34	42	51	61	72	84	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

$$\begin{aligned} J(x,y) &= \left|\left\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid a+b < x+y \vee a+b = x+y \wedge a < x\right\}\right| \\ &= \sum_{i=0}^{x+y} i + x \end{aligned}$$

Párovacia funkcia

Cantorova párovacia funkcia (modifikovaná verzia)

$\langle x, y\rangle$	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
0	1	2	4	7	11	16	22	$\cdots$
1	3	5	8	12	17	23	30	$\cdots$
2	6	9	13	18	24	31	39	$\cdots$
3	10	14	19	25	32	40	49	$\cdots$
4	15	20	26	33	41	50	60	$\cdots$
5	21	27	34	42	51	61	72	$\cdots$
6	28	35	43	52	62	73	85	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \left|\left\{(a, b) \in \mathrm{N}^2 \mid a + b < x + y \vee a + b = x + y \wedge a \leq x\right\}\right| \\ &= \sum_{i=0}^{x+y} i + 1 + x\end{aligned}$$

Párovacia funkcia

Vlastnosti párovacej funkcie

Modifikovaná verzia Cantorovej párovacej funkcie má tieto základné vlastnosti:

$$\langle x_1, x_2\rangle = \langle y_1, y_2\rangle \rightarrow x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2$$
$$x < \langle x, y\rangle \wedge y < \langle x, y\rangle$$
$$x = 0 \vee \exists y \exists z\, x = \langle y, z\rangle$$

Dôsledok:

$$0 \neq \langle x, y\rangle$$

Číslo 0 je jediný atom

Párovacia funkcia

Projekcie

Unárne projekcie π_1 a π_2 spĺňajú tieto identity:

$$\pi_1\langle x, y\rangle = x$$
$$\pi_2\langle x, y\rangle = y$$
$$\pi_1(0) = 0 = \pi_2(0)$$

Primitívna rekurzívnosť oboch funkcií plynie z tohoto vyjadrenia

$$\pi_1(x) = \mu y < x[\exists z < x\, x = \langle y, z\rangle]$$
$$\pi_2(x) = \mu z < x[\exists y < x\, x = \langle y, z\rangle]$$

Párovacia funkcia

Príklad

Fibonacciho postupnosť je p.r. funkcia:

$$f_0 = 0 \qquad f_1 = 1 \qquad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

Uvažujme totiž funkciu

$$g(n) = \langle f_n, f_{n+1} \rangle$$

Platí teda

$$f_n = \pi_1\, g(n)$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie g (a tým aj f_n) plynie z

$$\begin{aligned} g(0) &= \langle f_0, f_1 \rangle = \langle 0, 1 \rangle \\ g(n+1) &= \langle f_{n+1}, f_{n+2} \rangle = \left\langle \pi_2\, g(n), f_{n+1} + f_n \right\rangle = \\ &= \left\langle \pi_2\, g(n), \pi_2\, g(n) + \pi_1\, g(n) \right\rangle \end{aligned}$$

Aritmetizácia karteziánskeho súčinu

Aritmetizácia

Kódom n-tice $(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{N}^n$ je číslo

$$\ulcorner(x_1, \dots, x_n)\urcorner^n \in \mathrm{N}$$

definované induktívne takto

$$\begin{aligned}
\ulcorner\emptyset\urcorner^0 &= 0 \\
\ulcorner x\urcorner^1 &= x \\
\ulcorner(x_1, x_2, \dots, x_n)\urcorner^n &= \left\langle x_1, \ulcorner(x_2, \dots, x_n)\urcorner^{n-1}\right\rangle \qquad \text{if } n \geq 2
\end{aligned}$$

Príklad

$$\begin{aligned}
\ulcorner(0,1)\urcorner^2 &= \langle 0,1\rangle = 2 \\
\ulcorner(0,0,0)\urcorner^3 &= \left\langle 0, \ulcorner(0,0)\urcorner^2\right\rangle = \left\langle 0, \langle 0,0\rangle\right\rangle = \langle 0,1\rangle = 2
\end{aligned}$$

Aritmetizácia karteziánskeho súčinu

Notácia

Pre $n \geq 3$ zapisujeme $\big\langle x_1, \langle x_2, \ldots, x_n\rangle \big\rangle$ skrátene $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$:

$$\ulcorner(x_1, \ldots, x_n)\urcorner^n = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$$

Vlastnosť byť kódom n-tice prirodzených čísel

Binárny primitívne rekurzívny predikát $Tuple(n, x)$ platí, ak číslo x je kódom nejakej n-tice prirodzených čísel:

$$Tuple(n, x) \leftrightarrow n = 0 \wedge x = 0 \vee n = 1 \vee n \geq 2 \wedge \pi_2^{n-2}(x) \neq 0$$

Zdôvodnenie pre $n \geq 2$:

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n\, x = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle \leftrightarrow \pi_2^{n-2}(x) \neq 0$$

Aritmetizácia karteziánskeho súčinu

Projekcia

Zobecnenením projekcií π_1 a π_2 je ternárna funkcia $[x]_i^n$ taká, že

$$[\langle x_1, \ldots, x_n \rangle]_i^n = x_i \qquad \text{pre } 1 \leq i \leq n$$

Primitívna rekurzívnosť plynie z tohoto vyjadrenia

$$[x]_i^n = \textbf{if } i \neq n \textbf{ then } \pi_1 \pi_2^{i \dot{-} 1}(x) \textbf{ else } \pi_2^{n \dot{-} 1}(x)$$

Zdôvodnenie pre $n \geq 2$:

$$x = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \to \bigwedge_{i=1}^{n-1} x_i = \pi_1\, \pi_2^{i-1}(x) \wedge x_n = \pi_2^{n-1}(x)$$

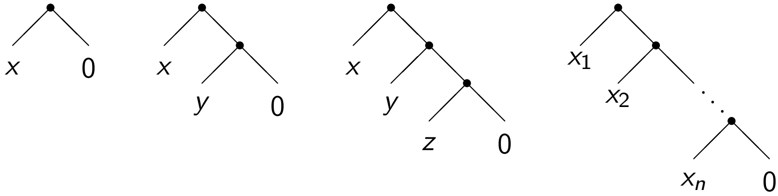
Aritmetizácia konečných postupností

Aritmetizácia

Kódom konečnej postupnosti $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathrm{N}^n$ je číslo

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, 0 \rangle$$

Kódom prázdnej postupnosti je číslo 0



$\langle x, 0 \rangle$ $\quad$ $\langle x, y, 0 \rangle$ $\quad$ $\langle x, y, z, 0 \rangle$ $\quad$ $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, 0 \rangle$

Každé prirodzené číslo je kódom nejakej konečnej postupnosti

Aritmetizácia konečných postupností

Dĺžka postupnosti

Funkcia $\mathrm{L}(x)$ vypočíta dĺžku postupnosti x:

$$\mathrm{L}\,\langle x_1, \ldots, x_n, 0\rangle = n$$

Primitívna rekurzívnosť plynie z tohoto vyjadrenia

$$\mathrm{L}(x) = \mu n \leq x[\pi_2^n(x) = 0]$$

Indexovacia funkcia

Binárna operácia $(x)_i$ vráti $(i{+}1)$-vý prvok postupnosti x:

$$\big(\langle x_0, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1}, 0\rangle\big)_i = x_i \qquad \text{pre } i < n$$

Primitívna rekurzívnosť plynie z tohoto vyjadrenia

$$(x)_i = \pi_1\, \pi_2^i(x)$$

Záver

3. cvičenie

- Výsledky s komentárom nájdete na webe

4. cvičenie

- Začína hneď po prednáške v miestnosti I-H3
- Pracujte samostatne
- Úlohy odovzdať najneskôr do 12:00 v pondelok budúci týždeň

4. prednáška

- Rekurzia so substitúciou v parametri