1-AIN-625 Úvod do matematickej logiky pre programátorov
1-INF-450 Logika pre informatikov

Zimný semester 2011/12
3. prednáška

Ján Komara

Obsah 3. prednášky

Zopakovanie a stručná osnova predmetu

Cieľ predmetu

- Vybudovať matematické základy deklaratívnych programovacích jazykov

Stručná osnova predmetu

- Primitívne rekurzívne funkcie
  - kódovanie (aritmetizácia) dátových štruktúr
  - regulárne rekurzívne definície s mierou
- Obecne rekurzívne funkcie
  - univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie
- Čiastočne rekurzívne funkcie
  - Kleeneho prvá veta o rekurzii
  - Kleeneho veta o normálnej forme
  - rekurzívne nerozhodnuteľné problémy – problém zastavenia
  - Churchova téza

Zopakovanie a stručná osnova predmetu

Primitívne rekurzívne funkcie

- Základné funkcie
  - konštantná funkcia $\mathrm{Z}(x) = 0$
  - funkcia nasledovníka $\mathrm{S}(x) = x + 1$
  - identity (projekcie)

    $$\mathrm{I}_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$$

    pre každé $1 \leq i \leq n$
- Kompozícia (skladanie) funkcií

  $$f(\vec{x}) = h\big(g_1(\vec{x}), \ldots, g_m(\vec{x})\big)$$

- Primitívna rekurzia

  $$\begin{aligned} f(0, \vec{y}) &= g(\vec{y}) \\ f\big(\mathrm{S}(x), \vec{y}\big) &= h\big(x, f(x, \vec{y}), \vec{y}\big) \end{aligned}$$

Zopakovanie a stručná osnova predmetu

Primitívne rekurzívne odvodenia

$$
\begin{aligned}
& & h_1(x,z,y) &= \mathsf{S}\,\mathsf{I}^3_2(x,z,y)\\
0+y &= y & 0+y &= \mathsf{I}(y)\\
x+1+y &= x+y+1 & \mathsf{S}(x)+y &= h_1(x,x+y,y)\\
& & h_2(x,z,y) &= \mathsf{I}^3_2(x,z,y)+\mathsf{I}^3_3(x,z,y)\\
0\cdot y &= 0 & 0\cdot y &= \mathsf{Z}(y)\\
(x+1)\cdot y &= x\cdot y+y & \mathsf{S}(x)\cdot y &= h_2(x,x\cdot y,y)\\
& & \mathsf{C}_1(x) &= \mathsf{S}\,\mathsf{Z}(x)\\
& & h_3(y,z,x) &= \mathsf{I}^3_3(y,z,x)\cdot\mathsf{I}^3_2(y,z,x)\\
x^0 &= 1 & f(0,x) &= \mathsf{C}_1(x)\\
x^{y+1} &= x\cdot x^y & f\big(\mathsf{S}(y),x\big) &= h_3\big(y,f(y,x),x\big)\\
& & x^y &= f\big(I^2_2(x,y),I^2_1(x,y)\big)
\end{aligned}
$$

Zopakovanie a stručná osnova predmetu

Primitívne rekurzívne funkcie

- Základný vývoj primitívne rekurzívnych funkcií
- Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia
- Párovacia funkcia a aritmetizácia (Gödelizácia)
- Rekurzia so substitúciou v parametri

$$\begin{aligned} f(0,y) &= g(y) \\ f(x+1,y) &= h\big(x, f(x, s(x,y)), y\big) \end{aligned}$$

- Vnorená jednoduchá rekurzia

$$\begin{aligned} f(0,y) &= g(y) \\ f(x+1,y) &= h\Big(x, f\big(x, s_1(x,y)\big), f\big(x, s_2(x,y,f(x,s_1(x,y)))\big), y\Big) \end{aligned}$$

- Regulárne rekurzívne definície s mierou

Základný vývoj primitívne rekurzívnych funkcií

Konštantné funkcie sú primitívne rekurzívne

- Unárne konštantné funkcie:

$$\mathrm{C}_m(x) = m$$

Primitívna rekurzívnosť C_m pomocou induktívneho argumentu

$$\mathrm{C}_0 = \mathrm{Z}$$
$$\mathrm{C}_{m+1}(x) = \mathrm{S}\,\mathrm{C}_m(x).$$

- Konštantné funkcie z ľubovolným počtom argumentov

$$\mathrm{C}^n_m(x_1, \ldots, x_n) = m$$

Primitívnu rekurzívnosť C^n_m dostaneme z tejto kompozície

$$\mathrm{C}^n_m(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{C}_m\,\mathrm{I}^n_1(x_1, \ldots, x_n)$$

Explicitné definície funkcií

Sú to definície v tvare

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tau[x_1, \ldots, x_n]$$

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na explicitné definície

Dôkaz.

Preklad definície induktívne podľa štruktúry termu τ:

$$f(x, y, z) = g_3\Big(x, g_2(z, g_1(x)), 2\Big)$$

Explicitné definície funkcií

Sú to definície v tvare

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tau[x_1, \ldots, x_n]$$

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na explicitné definície

Dôkaz.

Preklad definície induktívne podľa štruktúry termu τ:

$$\begin{aligned}
h_1(x, y, z) &= g_1\, \mathsf{I}^3_1(x, y, z) \\
h_2(x, y, z) &= g_2\big(\mathsf{I}^3_3(x, y, z), h_1(x, y, z)\big) \\
f(x, y, z) &= g_3\big(\mathsf{I}^3_1(x, y, z), h_2(x, y, z), \mathsf{C}^3_2(x, y, z)\big)
\end{aligned}$$

Primitívne rekurzívne definície

Sú to definície v tvare

$$f(\vec{y},0,\vec{z}) = \rho[\vec{y},\vec{z}]$$
$$f(\vec{y},x+1,\vec{z}) = \tau[\vec{y},x,f(\vec{y},x,\vec{z}),\vec{z}]$$

Špeciálne prípady

- Iterácia unárnej funkcie

$$f^0(x) = x$$
$$f^{n+1}(x) = f\,f^n(x)$$

- Explicitná definícia s monadickou diskrimináciou

$$f(\vec{y},0,\vec{z}) = \rho[\vec{y},\vec{z}]$$
$$f(\vec{y},x+1,\vec{z}) = \tau[\vec{y},x,\vec{z}]$$

Lema

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na primitívne rekurzívne definície s aspoň jedným parametrom

Dôkaz.

Primitívne rekurzívna definícia s aspoň jedným parametrom $\vec{y}, \vec{z}$:

$$
\begin{aligned}
f(\vec{y}, 0, \vec{z}) &= \rho[\vec{y}, \vec{z}] \\
f(\vec{y}, x+1, \vec{z}) &= \tau[\vec{y}, x, f(\vec{y}, x, \vec{z}), \vec{z}]
\end{aligned}
$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$
\begin{aligned}
g(\vec{y}, \vec{z}) &= \rho[\vec{y}, \vec{z}] \\
h(x, a, \vec{y}, \vec{z}) &= \tau[\vec{y}, x, a, \vec{z}] \\
f_1(0, \vec{y}, \vec{z}) &= g(\vec{y}, \vec{z}) \\
f_1(\mathrm{S}(x), \vec{y}, \vec{z}) &= h(x, f_1(x, \vec{y}, \vec{z}), \vec{y}, \vec{z}) \\
f(\vec{y}, x, \vec{z}) &= f_1(x, \vec{y}, \vec{z})
\end{aligned}
$$

Lema

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na bezparametrické primitívne rekurzívne definície

Dôkaz.

Bezparametrická primitívne rekurzívna definícia unárnej funkcie:

$$
\begin{aligned}
f(0) &= \rho \\
f(x+1) &= \tau[x, f(x)]
\end{aligned}
$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia podľa predošlej lemy

$$
\begin{aligned}
f_1(0, w) &= \rho \\
f_1(x+1, w) &= \tau[x, f_1(x, w)] \\
f(x) &= f_1(x, 0)
\end{aligned}
$$

Základný vývoj primitívne rekurzívnych funkcií

Primitívne rekurzívne definície

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na primitívne rekurzívne definície

Dôsledok

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na operátor iterácie unárnych funkcií

Dôsledok

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na explicitné definície funkcií s monadickou diskrimináciou

Príklady primitívne rekurzívnych funkcií

Násobenie

$$0 \cdot y = 0 \qquad (x+1) \cdot y = x \cdot y + y$$

Umocňovanie

$$x^0 = 1 \qquad x^{y+1} = x \cdot x^y$$

Sumačná funkcia

$$\sum_{i=0}^{0} i = 0 \qquad \sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{n} i + n + 1$$

Modifikované odčítanie

Definícia

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y & \text{ak } x \geq y \\ 0 & \text{ak } x \leq y \end{cases}$$

Príklady primitívne rekurzívnych funkcií

Funkcia predchodcu

$$0 \dot{-} 1 = 0$$
$$x + 1 \dot{-} 1 = x$$

Modifikované odčítanie

$$x \dot{-} 0 = x$$
$$x \dot{-} (y + 1) = x \dot{-} y \dot{-} 1$$

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Charakteristická funkcia predikátu

Charakteristická funkcia predikátu P je funkcia P_* definovaná predpisom

$$P_*(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{ak platí } P(\vec{x}) \\ 0 & \text{ak neplatí } P(\vec{x}) \end{cases}$$

Notačná konvencia $x \ P_* \ y$ pre binárne predikáty s infixovou notáciou

Primitívne rekurzívne predikáty

Predikát je primitívne rekurzívny, ak jeho charakteristická funkcia je primitívne rekurzívna funkcia

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Jazyk formúl

Tvrdenia tvoríme z atomických formúl pomocou logických spojok a kvantifikátorov:

$$\neg\varphi \qquad \text{(negácia)}$$

$$\varphi \wedge \psi \qquad \text{(konjunkcia)}$$

$$\varphi \vee \psi \qquad \text{(disjunkcia)}$$

$$\varphi \rightarrow \psi \qquad \text{(implikácia)}$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi \qquad \text{(ekvivalencia)}$$

$$\forall x \varphi \qquad \text{(univerzálny kvantifikátor)}$$

$$\exists x \varphi \qquad \text{(existenčný kvantifikátor)}$$

$$\forall x \leq \tau\, \varphi \equiv \forall x (x \leq \tau \rightarrow \varphi) \qquad \text{(ohraničený kvantifikátor)}$$

$$\exists x \leq \tau\, \varphi \equiv \exists x (x \leq \tau \wedge \varphi) \qquad \text{(ohraničený kvantifikátor)}$$

Ohraničená formula obsahuje len ohraničené kvantifikátory

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Notačné konvencie pri zápise formúl

Od najvyššej priority k najmenšej:

- kvantifikátory
- negácia
- konjunkcia
- disjunkcia
- implikácia a ekvivalencia

Príklad

Zadanie formuly v úplnej notácií

$$\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \leftrightarrow ((\neg\varphi_3) \vee ((\exists x \varphi_4) \wedge \varphi_5)))$$

Jej skrátený zápis

$$\varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \leftrightarrow \neg\varphi_3 \vee \exists x \varphi_4 \wedge \varphi_5$$

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Explicitné definície predikátov

Sú to definície v tvare

$$P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi[x_1, \ldots, x_n]$$

Nás zaujíma hlavne prípad, keď φ je ohraničená formula

Príklad

Explicitná definícia predikátu deliteľnosti

$$x \mid y \leftrightarrow \exists z\, y = xz$$

Iná definícia tentokrát s ohraničenou formulou

$$x \mid y \leftrightarrow \exists z \leq y\, y = xz$$

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Ohraničená minimalizácia

Sú to definície v tvare (φ je ohraničená formula)

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} \text{najmenšie číslo } y \leq \tau[\vec{x}] \text{ také, že platí } \varphi[\vec{x}, y] \\ 0, \text{ ak také číslo neexistuje} \end{cases}$$

Skrátený zápis $f(\vec{x}) = \mu y \leq \tau[\vec{x}]\big[\varphi[\vec{x}, y]\big]$

Príklad

Neúplne delenie

$$x \div y = q \leftrightarrow y = 0 \land q = 0 \lor y \neq 0 \land \exists r(x = qy + r \land r < y)$$

Iná definícia tentokrát ohraničenou minimalizáciou

$$x \div y = \mu q \leq x[x < (q+1)y]$$

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Diskriminačná funkcia je primitívne rekurzívna

Ternárna diskriminačná funkcia D je definovaná predpisom

$$\mathrm{D}(x, y, z) = v \leftrightarrow x \neq 0 \land v = y \lor x = 0 \land v = z$$

Notačná konvencia

$$D(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \equiv \textbf{if } \tau_1 \neq 0 \textbf{ then } \tau_2 \textbf{ else } \tau_3$$
$$D\big(P_*(\vec{\tau}_1), \tau_2, \tau_3\big) \equiv \textbf{if } P(\vec{\tau}_1) \textbf{ then } \tau_2 \textbf{ else } \tau_3$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie D plynie z tohoto vyjadrenia

$$\mathrm{D}(0, y, z) = z$$
$$\mathrm{D}(x + 1, y, z) = y$$

Je to explicitná definícia s monadickou diskrimináciou

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Rovnosť je primitívne rekurzívny predikát

Pretože $x = y \leftrightarrow x \dot{-} y + (y \dot{-} x) = 0$, primitívna rekurzívnosť funkcie $x =_* y$ plynie z tohoto vyjadrenia

$$(x =_* y) = \mathrm{D}\big(x \dot{-} y + (y \dot{-} x), 0, 1\big)$$

Boolovské funkcie sú primitívne rekurzívne

Základné boolovské funkcie

$$(\neg_* x) = y \leftrightarrow x \neq 0 \wedge y = 0 \vee x = 0 \wedge y = 1$$
$$(x \wedge_* y) = z \leftrightarrow x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z = 1 \vee (x = 0 \vee y = 0) \wedge z = 0$$

Primitívna rekurzívnosť bool. funkcií plynie z tohoto vyjadrenia

$$(\neg_* x) = \mathrm{D}(x, 0, 1)$$
$$(x \wedge_* y) = \mathrm{D}\big(x, \mathrm{D}(y, 1, 0), 0\big)$$

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Operátor ohraničenej minimalizácie

Je to definícia v tvare

$$f(x, \vec{y}) = \mu z \leq x\,[g(z, \vec{y}) = 1]$$

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na operátor ohraničenej minimalizácie

Dôkaz.

Primitívna rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$f(0, \vec{y}) = 0$$

$$f(x+1, \vec{y}) = \begin{cases} f(x, \vec{y}) & \text{ak } g\big(f(x, \vec{y}), \vec{y}\big) = 1 \\ x+1 & \text{ak } g\big(f(x, \vec{y}), \vec{y}\big) \neq 1 \text{ a } g(x+1, \vec{y}) = 1 \\ 0 & \text{ináč} \end{cases}$$

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Veta

Primitívne rekurzívne predikáty sú uzavreté na explicitné definície predikátov s ohraničenými formulami

Dôkaz.

Explicitná definícia predikátu s ohraničenou formulou:

$$P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi[x_1, \ldots, x_n]$$

Primitívna rekurzívnosť predikátu P_* plynie z tohoto vyjadrenia

$$P_*(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_*[x_1, \ldots, x_n]$$

Tu φ_* je charakteristický term formuly φ:

$$(\varphi \to \varphi_* = 1) \land (\neg\varphi \to \varphi_* = 0)$$

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Konštrukcia φ_* induktívne podľa štruktúry formuly φ:

$$
\begin{aligned}
(\rho = \tau)_* &\equiv (\rho =_* \tau) \\
(R(\vec{\tau}))_* &\equiv R_*(\vec{\tau}) \\
(\neg\psi)_* &\equiv (\neg_* \psi_*) \\
(\psi \wedge \chi)_* &\equiv (\psi_* \wedge \chi_*) \\
(\exists y \leq \tau\, \psi[y])_* &\equiv \psi_*\Big[\mu y \leq \tau \big[\psi_*[y] = 1\big]\Big]
\end{aligned}
$$

Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia

Veta

Primitívne rekurzívne funkcie sú uzavreté na definície funkcií ohraničenou minimalizáciou

Dôkaz.

Definícia funkcie ohraničenou minimalizáciou:

$$f(\vec{x}) = \mu y \leq \tau[\vec{x}]\big[\varphi[\vec{x}, y]\big]$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie f plynie z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned} P(y, \vec{x}) &\leftrightarrow \varphi[\vec{x}, y] \\ g(z, \vec{x}) &= \mu y \leq z[P_*(y, \vec{x}) = 1] \\ f(\vec{x}) &= g(\tau[\vec{x}], \vec{x}) \end{aligned}$$

Záver

2. cvičenie

- Výsledky s komentárom nájdete na webe

3. cvičenie

- Začína hneď po prednáške v miestnosti I-H3
- Pracujte samostatne
- Úlohy odovzdať najneskôr do 12:00 v pondelok budúci týždeň

4. prednáška

- Párovacia funkcia a aritmetizácia (Gödelizácia)