1-AIN-625 Úvod do matematickej logiky pre programátorov
1-INF-450 Logika pre informatikov

Zimný semester 2011/12

2. prednáška

Ján Komara

Obsah 2. prednášky

Zopakovanie

Cieľ predmetu

- Vybudovať matematické základy deklaratívnych programovacích jazykov

Stručná osnova predmetu

- Primitívne rekurzívne funkcie
  - kódovanie (aritmetizácia) dátových štruktúr
  - regulárne rekurzívne definície s mierou
- Obecne rekurzívne funkcie
  - univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie
- Čiastočne rekurzívne funkcie
  - Kleeneho prvá veta o rekurzii
  - Kleeneho veta o normálnej forme
  - rekurzívne nerozhodnuteľné problémy – problém zastavenia
  - Churchova téza

Zopakovanie

Primitívne rekurzívne funkcie

- Základné funkcie
  - konštantná funkcia $\mathrm{Z}(x) = 0$
  - funkcia nasledovníka $\mathrm{S}(x) = x + 1$
  - identity (projekcie)

    $$\mathrm{I}_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$$

    pre každé $1 \leq i \leq n$
- Kompozícia (skladanie) funkcií

$$f(\vec{x}) = h\big(g_1(\vec{x}), \ldots, g_m(\vec{x})\big)$$

- Primitívna rekurzia

$$f(0, \vec{y}) = g(\vec{y})$$
$$f\big(\mathrm{S}(x), \vec{y}\big) = h\big(x, f(x, \vec{y}), \vec{y}\big)$$

Zopakovanie

Primitívne rekurzívne odvodenia

$$
\begin{aligned}
& & h_1(x,z,y) &= \mathsf{S}\,\mathsf{I}^3_2(x,z,y) \\
0+y &= y & 0+y &= \mathsf{I}(y) \\
x+1+y &= x+y+1 & \mathsf{S}(x)+y &= h_1(x,x+y,y) \\
& & h_2(x,z,y) &= \mathsf{I}^3_2(x,z,y) + \mathsf{I}^3_3(x,z,y) \\
0 \cdot y &= 0 & 0 \cdot y &= \mathsf{Z}(y) \\
(x+1) \cdot y &= x \cdot y + y & \mathsf{S}(x) \cdot y &= h_2(x, x \cdot y, y) \\
& & \mathsf{C}_1(x) &= \mathsf{S}\,\mathsf{Z}(x) \\
& & h_3(y,z,x) &= \mathsf{I}^3_3(y,z,x) \cdot \mathsf{I}^3_2(y,z,x) \\
x^0 &= 1 & f(0,x) &= \mathsf{C}_1(x) \\
x^{y+1} &= x \cdot x^y & f\left(\mathsf{S}(y),x\right) &= h_3\left(y, f(y,x), x\right) \\
& & x^y &= f\left(I^2_2(x,y), I^2_1(x,y)\right)
\end{aligned}
$$

Cantorova párovacia funkcia (modifikovaná verzia)

$\langle x, y\rangle$	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
0	1	2	4	7	11	16	22	$\cdots$
1	3	5	8	12	17	23	30	$\cdots$
2	6	9	13	18	24	31	39	$\cdots$
3	10	14	19	25	32	40	49	$\cdots$
4	15	20	26	33	41	50	60	$\cdots$
5	21	27	34	42	51	61	72	$\cdots$
6	28	35	43	52	62	73	85	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=0}^{x+y} i + 1 + x$$

Vlastnosti párovacej funkcie

Modifikovaná verzia Cantorovej párovacej funkcie má tieto základné vlastnosti:

$$\langle x_1, x_2\rangle = \langle y_1, y_2\rangle \to x_1 = y_1 \land x_2 = y_2$$
$$x < \langle x, y\rangle \land y < \langle x, y\rangle$$
$$x = 0 \lor \exists y \exists z\, x = \langle y, z\rangle$$

Projekcie

Unárne projekcie π_1 a π_2 spĺňajú tieto identity:

$$\pi_1\langle x, y\rangle = x \qquad \pi_2\langle x, y\rangle = y \qquad \pi_1(0) = 0 = \pi_2(0)$$

Notácia

Pre $n \geq 3$ zapisujeme $\langle x_1, \langle x_2, \ldots, x_n \rangle \rangle$ skrátene $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$

Aritmetizácia karteziánskeho súčinu

- Kódom n-tice $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{N}^n$ je číslo

$$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in \mathrm{N}$$

- Zobecnená projekcia $[x]_i^n$ operuje na kódoch n-tíc:

$$[\langle x_1, \ldots, x_n \rangle]_i^n = x_i \qquad \text{pre } 1 \leq i \leq n$$

Definícia:

$$[x]_i^n = \textbf{if } i \neq n \textbf{ then } \pi_1 \pi_2^{i \dot{-} 1}(x) \textbf{ else } \pi_2^{n \dot{-} 1}(x)$$

Primitívne rekurzívne funkčné symboly

Trieda PR^n pozostáva z n-árnych p.r. funkčných symbolov:

- $Z \in \mathrm{PR}^1$
- $S \in \mathrm{PR}^1$
- $I_i^n \in \mathrm{PR}^n$ pre $1 \leq i \leq n$
- ak $h \in \mathrm{PR}^m$ a $g_1, \ldots, g_m \in \mathrm{PR}^n$ potom
$$Comp_m^n(h, g_1, \ldots, g_m) \in \mathrm{PR}^n$$
- ak $g \in \mathrm{PR}^n$ a $h \in \mathrm{PR}^{n+2}$ potom
$$Rec_{n+1}(g, h) \in \mathrm{PR}^{n+1}$$

Ich zjednotenie je trieda všetkých p.r. funkčných symbolov

$$\mathrm{PR} = \bigcup_{n \geq 1} \mathrm{PR}^n$$

Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie

Aritmetizácia primitívne rekurzívnych odvodení

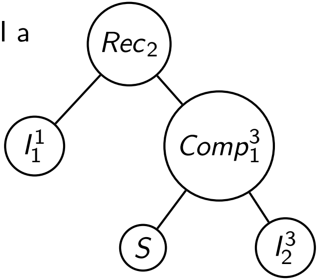
Príklad

Primitívne rekurzívne odvodenie operácie sčítania

$$\begin{aligned} 0 + y &= y \\ x + 1 + y &= x + y + 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} h(x, z, y) &= \mathsf{S}\,\mathsf{I}^3_2(x, z, y) \\ 0 + y &= \mathsf{I}(y) \\ \mathsf{S}(x) + y &= h(x, x + y, y) \end{aligned}$$

Primitívne rekurzívny funkčný symbol a jeho syntaktický strom

$$Rec_2(I^1_1, Comp^3_1(S, I^3_2))$$



Interpretácia primitívne rekurzívnych funkčných symbolov

Symbol $f \in \mathrm{PR}^n$ interpretujeme ako n-árnu funkciu $f^{\mathcal{N}}$ nad $\mathbb{N}$:

- $Z^{\mathcal{N}}$ je konštantná funkcia $\mathrm{Z}(x) = 0$
- $S^{\mathcal{N}}$ je funkcia nasledovníka $\mathrm{S}(x) = x + 1$
- $(I_i^n)^{\mathcal{N}}$ je identita $\mathrm{I}_i^n(\vec{x}) = x_i$
- $\big(Comp_m^n(h, g_1, \ldots, g_m)\big)^{\mathcal{N}}$ je funkcia definovaná kompozíciou

$$\big(Comp_m^n(h, g_1, \ldots, g_m)\big)^{\mathcal{N}}(\vec{x}) = h^{\mathcal{N}}\big(g_1^{\mathcal{N}}(\vec{x}), \ldots, g_m^{\mathcal{N}}(\vec{x})\big)$$

- $\big(Rec_n(g, h)\big)^{\mathcal{N}}$ je funkcia definovaná primitívnou rekurziou

$$\big(Rec_n(g, h)\big)^{\mathcal{N}}(0, \vec{y}) = g^{\mathcal{N}}(\vec{y})$$
$$\big(Rec_n(g, h)\big)^{\mathcal{N}}(x + 1, \vec{y}) = h^{\mathcal{N}}\big(x, \big(Rec_n(g, h)\big)^{\mathcal{N}}(x, \vec{y}), \vec{y}\big)$$

Aritmetizácia primitívne rekurzívnych funkčných symbolov

Pomocou párových konštruktorov z rôznymi rozlišovacími položkami:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Z} &= \langle 1, 0 \rangle && \text{(konštantná funkcia)} \\
\boldsymbol{S} &= \langle 2, 0 \rangle && \text{(funkcia nasledovníka)} \\
\boldsymbol{I}_i^n &= \langle 3, n, i \rangle && \text{(identity)} \\
\boldsymbol{\langle} g, gs \boldsymbol{\rangle} &= \langle 4, g, gs \rangle && \text{(kontrakcia)} \\
\boldsymbol{Comp}_m^n(h, gs) &= \langle 5, n, m, h, gs \rangle && \text{(kompozícia)} \\
\boldsymbol{Rec}_n(g, h) &= \langle 6, n, g, h \rangle && \text{(primitívna rekurzia)}
\end{aligned}
$$

Pre konštruktor $\boldsymbol{\langle} g, gs \boldsymbol{\rangle}$ používame podobné notačné konvencie ako pre párovaciu funkciu $\langle x, y \rangle$

Aritmetizácia primitívne rekurzívnych funkčných symbolov

Číslo $\ulcorner f \urcorner \in \mathrm{N}$ je kódom p.r. funkčného symbolu $f \in \mathrm{PR}$:

$$\begin{aligned}
\ulcorner Z \urcorner &= \boldsymbol{Z} \\
\ulcorner S \urcorner &= \boldsymbol{S} \\
\ulcorner I_i^n \urcorner &= \boldsymbol{I}_i^n \\
\ulcorner Comp_m^n(h, g_1, \ldots, g_m) \urcorner &= \boldsymbol{Comp}_m^n\big(\ulcorner h \urcorner, \langle \ulcorner g_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner g_m \urcorner \rangle\big) \\
\ulcorner Rec_n(g, h) \urcorner &= \boldsymbol{Rec}_n(\ulcorner g \urcorner, \ulcorner h \urcorner)
\end{aligned}$$

Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie

Príklad

Primitívne rekurzívne odvodenie operácie sčítania

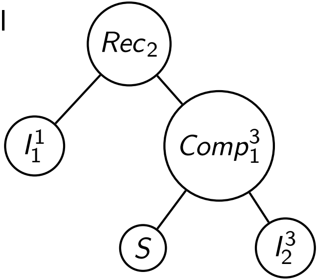
$$\begin{aligned} 0 + y &= y \\ x + 1 + y &= x + y + 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} h(x, z, y) &= \mathsf{S}\,\mathsf{I}^3_2(x, z, y) \\ 0 + y &= \mathsf{I}(y) \\ \mathsf{S}(x) + y &= h(x, x + y, y) \end{aligned}$$

Primitívne rekurzívny funkčný symbol

$$Rec_2(I^1_1, Comp^3_1(S, I^3_2))$$

a jeho aritmetizácia

$$\boldsymbol{Rec}_2(\boldsymbol{I}^1_1, \boldsymbol{Comp}^3_1(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{I}^3_2))$$



Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie

Interpreter programovacieho jazyka

Špecifikácia

Interpreter programovacieho jazyka p.r. odvodení je binárna funkcia $e \bullet x$, ktorá má tieto dve základné vlastnosti:

- Pre každé $f \in \mathrm{PR}^n$ a $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{N}$ platí rovnosť:

  $$\ulcorner f \urcorner \bullet \langle x_1, \ldots, x_n \rangle = f^{\mathcal{N}}(x_1, \ldots, x_n)$$

- Pre každé číslo $e \in \mathrm{N}$, unárna funkcia

  $$f(x) = e \bullet x$$

  je primitívne rekurzívna funkcia

Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie

Implementácia

Diskriminácia podľa konštruktorov p.r. funkčných symbolov:

$$
\begin{array}{l}
e \bullet x = \textbf{case} \\
\qquad\qquad e = \boldsymbol{Z} \Rightarrow 0 \\
\qquad\qquad e = \boldsymbol{S} \Rightarrow x + 1 \\
\qquad\qquad e = \boldsymbol{I}_i^n \Rightarrow [x]_i^n \\
\qquad\qquad e = \boldsymbol{\langle} g, gs \boldsymbol{\rangle} \Rightarrow \langle g \bullet x, gs \bullet x \rangle \\
\qquad\qquad e = \boldsymbol{Comp}_m^n(h, gs) \Rightarrow h \bullet (gs \bullet x) \\
\qquad\qquad e = \boldsymbol{Rec}_n(g, h) \Rightarrow \\
\qquad\qquad\quad \textbf{case} \\
\qquad\qquad\qquad x = \langle 0, y \rangle \Rightarrow g \bullet y \\
\qquad\qquad\qquad x = \langle z + 1, y \rangle \Rightarrow h \bullet \langle z, \boldsymbol{Rec}_n(g, h) \bullet \langle z, y \rangle, y \rangle \\
\qquad\qquad\qquad \textbf{otherwise} \Rightarrow 0 \\
\qquad\qquad\quad \textbf{end} \\
\qquad\qquad \textbf{otherwise} \Rightarrow 0 \\
\qquad \textbf{end}
\end{array}
$$

Implementácia

Klauzálna forma rekurzívnej definície:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Z} \bullet x &= 0 \\
\boldsymbol{S} \bullet x &= x + 1 \\
\boldsymbol{I}_i^n \bullet x &= [x]_i^n \\
\langle g, gs \rangle \bullet x &= \left\langle g \bullet x, gs \bullet x \right\rangle \\
\boldsymbol{Comp}_m^n(h, gs) \bullet x &= h \bullet (gs \bullet x) \\
\boldsymbol{Rec}_n(g, h) \bullet \langle 0, y \rangle &= g \bullet y \\
\boldsymbol{Rec}_n(g, h) \bullet \langle x + 1, y \rangle &= h \bullet \left\langle x, \boldsymbol{Rec}_n(g, h) \bullet \langle x, y \rangle, y \right\rangle
\end{aligned}
$$

Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie

Interpreter programovacieho jazyka

Dobré usporiadanie

Lexikografické usporiadanie dvojíc prirodzených čísel

$$(a, b) >_{\mathrm{lex}} (c, d) \leftrightarrow a > c \lor a = c \land b > d$$

Každá ostro klesajúca postupnosť je konečná

$$(a_1, b_1) >_{\mathrm{lex}} (a_2, b_2) >_{\mathrm{lex}} (a_3, b_3) >_{\mathrm{lex}} (a_4, b_4) >_{\mathrm{lex}} \cdots$$

Transfinitná rekurzia

Podmienky regularity pre interpreter $e \bullet x$:

$$\big(\boldsymbol{Rec}_n(g, h), \langle 0, y\rangle\big) >_{\mathrm{lex}} (g, y)$$
$$\big(\boldsymbol{Rec}_n(g, h), \langle x+1, y\rangle\big) >_{\mathrm{lex}} \big(\boldsymbol{Rec}_n(g, h), \langle x, y\rangle\big)$$

Záver

1. cvičenie

- Výsledky s komentárom nájdete na webe

2. cvičenie

- Začína hneď po prednáške v miestnosti I-H3
- Pracujte vo dvojiciach
- Úlohy odovzdať najneskôr do 12:00 v pondelok budúci týždeň

3. prednáška

- Základný vývoj primitívne rekurzívnych funkcií
- Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia