1-AIN-616 Symbolické programovanie a LISP

Letný semester 2015/16

7. prednáška

Ján Komara

Obsah 7. prednášky

Zopakovanie

Čiastočne rekurzívne funkcie

Výpočtový model pre čiastočne rekurzívne funkcie

Enumerácia čiastočne rekurzívnych funkcií

Rekurzívne nerozhodnuteľné problémy

Zopakovanie

Teória rekurzívnych funkcií

- Primitívne rekurzívne funkcie
  - Aritmetizácia dátových štruktúr.
  - Regulárne rekurzívne definície s mierou.
- Obecne rekurzívne funkcie
  - Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií:
    - Ackermannova funkcia,
    - univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie.
  - Churchova téza.
- Čiastočne rekurzívne funkcie
  - Kleeneho prvá veta o rekurzii (veta o pevnom bode).
  - Kleeneho veta o normálnej forme.
  - Turing-Churchova téza.

Teória rekurzívnych funkcií umožňuje vybudovať matematické základy deklaratívnych programovacích jazykov.

Čiastočne rekurzívne funkcie

Definícia triedy čiastočne rekurzívnych funkcií

- Základné funkcie:
  - funkcia nasledovníka $\mathrm{S}(x) = x + 1$,
  - funkcia predchodcu $\mathrm{P}(x) = x \dot{-} 1$.
- Explicitné definície čiastočných funkcií:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[x_1, \ldots, x_n].$$

- Rekurzívne definície čiastočných funkcií:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \ldots, x_n].$$

Funkcia je rekurzívna, ak je to totálna čiastočne rekurzívna funkcia.
Predikát je rekurzívny, ak taká je jeho charakteristická funkcia.

Čiastočne rekurzívne funkcie

Rekurzívne odvodenia

Sčítanie

$$x + y \simeq \textbf{if } x \neq 0 \textbf{ then } \mathrm{S}\big(\mathrm{P}(x) + y\big) \textbf{ else } y.$$

Odčítanie

$$x \dot{-} y \simeq \textbf{if } x \neq 0 \textbf{ then if } y \neq 0 \textbf{ then } \mathrm{P}(x) \dot{-} \mathrm{P}(y) \textbf{ else } x \textbf{ else } 0.$$

Násobenie

$$x{\cdot}y \simeq \textbf{if } x \neq 0 \textbf{ then } \mathrm{P}(x){\cdot}y + y \textbf{ else } 0.$$

Umocňovanie

$$x^y \simeq \textbf{if } y \neq 0 \textbf{ then } x{\cdot}x^{\mathrm{P}(y)} \textbf{ else } 1.$$

Výpočtový model pre čiastočne rekurzívne funkcie

Rekurzívne termy a funkčné symboly (príklad)

Primitívne rekurzívna definícia

$$\begin{aligned} 0 + y &= y \\ \mathrm{S}(x) + y &= \mathrm{S}(x + y). \end{aligned}$$

Regulárna rekurzívna definícia

$$x + y = \textbf{if } x \neq 0 \textbf{ then } \mathrm{S}\big(\mathrm{P}(x) + y\big) \textbf{ else } y.$$

Rekurzívna definícia so silnou rovnosťou

$$x_1 + x_2 \simeq \mathrm{D}\Big(x_1, \mathrm{S}\big(\mathrm{P}(x_1) + x_2\big), x_2\Big).$$

Rekurzívny funkčný symbol

$$\lambda_2.\mathrm{D}\Big(x_1, \mathrm{S}\,\mathfrak{f}_2\big(\mathrm{P}(x_1), x_2\big), x_2\Big).$$

Výpočtový model pre čiastočne rekurzívne funkcie

Monadické numerály

Výpočet prebieha na monadických numeráloch:

$$0 \quad \mathsf{S}(0) \quad \mathsf{S}\,\mathsf{S}(0) \quad \mathsf{S}\,\mathsf{S}\,\mathsf{S}(0) \quad \mathsf{S}\,\mathsf{S}\,\mathsf{S}\,\mathsf{S}(0) \quad \ldots .$$

Označenie:

- Ak x je prirodzené číslo, potom $\underline{x}$ je monadický numerál, ktorý denotuje číslo x:

$$\underline{x} \equiv \overbrace{\mathsf{S}\ldots\mathsf{S}}^{x\text{-krát}}(0).$$

- Ak $x_1, \ldots, x_n$ sú prirodzené čísla, potom

$$\underline{x_1, \ldots, x_n} \equiv \underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n} \equiv \overbrace{\mathsf{S}\ldots\mathsf{S}}^{x_1\text{-krát}}(0), \ldots, \overbrace{\mathsf{S}\ldots\mathsf{S}}^{x_n\text{-krát}}(0).$$

Výpočtový model pre čiastočne rekurzívne funkcie

Jeden krok výpočtu

Ak uzavretý rekurzívny term τ nie je numerál, tak musí obsahovať aspoň jeden podvýraz (*redex*) v tvare

$$\mathrm{D}(\underline{x}, \sigma_2, \sigma_3) \qquad \mathrm{P}(\underline{x}) \qquad (\lambda_n.\sigma)(\underline{\vec{x}}).$$

Jeden výpočtový krok spočíva v nájdení najľavejšieho redexu a jeho nahradením kontrakciou podľa nasledujúcich pravidiel

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}(\underline{0}, \sigma_2, \sigma_3) &\rhd_1 \sigma_3 \\
\mathrm{D}(\underline{x+1}, \sigma_2, \sigma_3) &\rhd_1 \sigma_2 \\
\mathrm{P}(\underline{x}) &\rhd_1 \underline{x \dot{-} 1} \\
(\lambda_n.\sigma[\mathfrak{f}_n; \vec{x}])(\underline{\vec{x}}) &\rhd_1 \sigma[\lambda_n.\sigma; \underline{\vec{x}}].
\end{aligned}$$

Tak dostaneme nový uzavretý rekurzívny term ρ a píšeme

$$\tau \rhd_1 \rho.$$

Výpočtový model pre čiastočne rekurzívne funkcie

Viac krokov výpočtu

Označenie:

- $\tau_1 \rhd_k \tau_2$, ak výraz τ_1 sa redukuje do výrazu τ_2 po k krokoch. To znamená, že existujú uzavreté rekurzívne termy $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_k$ také, že

  $$\tau_1 \equiv \rho_0 \rhd_1 \rho_1 \rhd_1 \cdots \rhd_1 \rho_k \equiv \tau_2.$$

  Umožníme tiež prípad $k = 0$. Vtedy $\tau_1 \rhd_0 \tau_2 \leftrightarrow \tau_1 \equiv \tau_2$.
- $\tau_1 \rhd \tau_2$, ak $\tau_1 \rhd_k \tau_2$ pre nejaké k.
- Ak $\tau \rhd \underline{x}$, tak vravíme, že výpočet skončil s výsledkom x.

Veta (Ekvivalentnosť definičnej a výpočtovej sémantiky)

Pre každý rekurzívny funkčný symbol f platí:

$$f(\vec{x}) \simeq y \leftrightarrow f(\underline{\vec{x}}) \rhd \underline{y}.$$

Enumerácia čiastočne rekurzívnych funkcií

Rekurzívne indexy

Symbolom $\varphi_e^{(n)}$ označujeme n-árnu čiastočne rekurzívnu funkciu definovanú predpisom

$$\varphi_e^{(n)} = \begin{cases} f & \text{ak } e = \ulcorner f \urcorner \text{ pre nejaký } n\text{-árny rek. fun. symbol } f, \\ \emptyset^{(n)} & \text{ináč.} \end{cases}$$

Ak $f = \varphi_e^{(n)}$ tak číslo e nazveme rekurzívnym indexom čiastočnej funkcie f. Čísla v tvare $\ulcorner f \urcorner$ sú dobre vytvorené indexy.

Veta

Čiastočná funkcia je rekurzívna práve vtedy, keď má rekurzívny index.

Enumerácia čiastočne rekurzívnych funkcií

Enumeračná čiastočná funkcia

Symbolom Ψ_n si označíme $(n+1)$-árnu čiastočnú funkciu definovanú predpisom

$$\Psi_n(e, x_1, \ldots, x_n) \simeq \varphi_e^{(n)}(x_1, \ldots, x_n).$$

Veta o enumerácií (Kleene)

Pre každé $n \geq 1$, čiastočná funkcia Ψ_n je čiastočne rekurzívna funkcia, ktorá enumeruje (s opakovaním) triedu n-árnych čiastočne rekurzívnych funkcií, t. j. postupnosť

$$\lambda x_1 \ldots x_n \,.\, \Psi_n(e, x_1, \ldots, x_n) \qquad \textit{pre } e = 0, 1, 2, \ldots$$

je enumerácia triedy n-árnych čiastočne rekurzívnych funkcií.

Enumerácia čiastočne rekurzívnych funkcií

Enumeračná čiastočná funkcia je univerzálna (platí to aj naopak)

$(n+1)$-árna čiastočná funkcia Ψ_n spĺňa tieto dve podmienky:

- Pre každú n-árnu čiastočne rekurzívnu funkciu f existuje číslo e také, že pre každú n-ticu čísel $x_1, \dots, x_n$ platí rovnosť

$$\Psi_n(e, x_1, \dots, x_n) \simeq f(x_1, \dots, x_n).$$

- Pre každé číslo e je n-árna čiastočná funkcia f definovaná vzťahom

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq \Psi_n(e, x_1, \dots, x_n)$$

  čiastočne rekurzívna.

Vravíme, že Ψ_n je univerzálnou pre triedu n-árnych čiastočne rekurzívnych funkcií.

Enumerácia čiastočne rekurzívnych funkcií

Zúplnenie enumeračnej čiastočnej funkcie nie je rekurzívna funkcia

Dôkaz sporom. Predpokladajme napr., že binárna funkcia f:

$$f(e,x) \simeq \begin{cases} \Psi_1(e,x) & \text{ak } \Psi_1(e,x)\downarrow \\ 0 & \text{ak } \Psi_1(e,x)\uparrow \end{cases} \tag{1}$$

je rekurzívna. Potom aj unárna funkcia g definovaná vzťahom

$$g(x) = f(x,x) + 1 \tag{2}$$

je rekurzívna. Existuje teda číslo e také, že pre každé číslo x platí

$$\Psi_1(e,x) \simeq g(x). \tag{3}$$

Odtiaľ $\Psi_1(e,e)\downarrow$. Postupnými úpravami odvodíme spor:

$$g(e) \overset{(2)}{=} f(e,e) + 1 \overset{(1)}{\simeq} \Psi_1(e,e) + 1 \overset{(3)}{\simeq} g(e) + 1.$$

Rekurzívne nerozhodnuteľné problémy

Churchova téza (1936)

Trieda intuitívne vypočítateľných funkcií nad oborom prirodzených čísel je totožná s triedou obecne rekurzívnych funkcií.

Turingova téza (1936-1937)

Trieda intuitívne vypočítateľných funkcií nad oborom prirodzených čísel je totožná s triedou funkcií vypočítateľných na Turingových strojoch.

Modely (čiastočne) vypočítateľných funkcií

- obecne rekurzívne funkcie [Herbrand-Gödel, 1931, 1934],
- λ-definovateľné funkcie [Church, 1932],
- (čiastočne) μ-rekurzívne funkcie [Kleene, 1935, 1952],
- Turingove stroje [Turing, 1936-1937],
- čiastočne rekurzívne funkcie [Kleene, 1952],
- registrové stroje [napr. Minsky, 1961].

Rekurzívne nerozhodnuteľné problémy

Problém zastavenia

Aritmetizácia problému zastavenia pre n-árne čiastočne rekurzívne funkcie je $(n+1)$-árny predikát definovaný predpisom

$$\mathrm{W}_e^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi_e^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)\downarrow .$$

Veta

Problém zastavenia pre n-árne čiastočne rekurzívne funkcie je nerozhodnuteľný problém.

Dôkaz.

V opačnom prípade by takéto zúplnenie enumeračnej čiastočnej funkcie Ψ_n bola rekurzívna funkcia:

$$f(e, x_1, \ldots, x_n) \simeq \begin{cases} \varphi_e^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) & \text{ak } \varphi_e^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)\downarrow, \\ 0 & \text{ak } \varphi_e^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)\uparrow. \end{cases}$$

Rekurzívne nerozhodnuteľné problémy

Problém zastavenia

Aritmetizácia problému zastavenia pre n-árne čiastočne rekurzívne funkcie je $(n+1)$-árny predikát definovaný predpisom

$$\mathrm{W}_e^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi_e^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)\downarrow .$$

Veta

Problém zastavenia pre n-árne čiastočne rekurzívne funkcie je nerozhodnuteľný problém.

Dôkaz.

V opačnom prípade by takéto zúplnenie enumeračnej čiastočnej funkcie Ψ_n bola rekurzívna funkcia:

$$f(e, x_1, \ldots, x_n) \simeq \textbf{if } \mathrm{W}_e^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) \textbf{ then } \Psi_n(e, x_1, \ldots, x_n) \textbf{ else } 0.$$

Rekurzívne nerozhodnuteľné problémy

Veta

Problém zastavenia pre enumeračnú čiastočnú funkciu je nerozhodnuteľný problém.

Dôkaz.

Nech e_n je rekurzívny index enumeračnej čiastočnej funkcie Ψ_n:

$$\Psi_n(e, x_1, \ldots, x_n) \simeq \Psi_{n+1}(e_n, e, x_1, \ldots, x_n).$$

Čiže

$$\varphi_e^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)\downarrow \leftrightarrow \varphi_{e_n}^{(n+1)}(e, x_1, \ldots, x_n)\downarrow .$$

Odtiaľ dostaneme

$$\mathrm{W}_e^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \mathrm{W}_{e_n}^{(n+1)}(e, x_1, \ldots, x_n).$$

Z rozhodnuteľnosti problému zastavenia pre Ψ_n by sme dostali rozhodnuteľnosť všeobecného problému zastavenia.